

Dominio di definizione

Determinare il dominio della seguente funzione trascendente

$$f(x) = \sqrt{3 \cdot 4^x - 2^x} + \sqrt{\frac{x}{1-|x|}}$$

Soluzione

La funzione è somma di una funzione trascendente con una irrazionale fratta. La presenza di radicali di indice pari richiede per l'esistenza che x sia soluzione del seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 3 \cdot 4^x - 2^x \geq 0 \\ \frac{x}{1-|x|} \geq 0 \end{cases}$$

RisolviAMO separatamente le due disequazioni; successivamente effettueremo l'intersezione dei loro insiemi di soluzioni per determinare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Prima disequazione

$$3 \cdot 4^x - 2^x \geq 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (2^x)^2 - 2^x \geq 0 \Leftrightarrow 2^x (3 \cdot 2^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow (3 \cdot 2^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 2^x \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geq -\log_2 3$$

Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione è: $S_1 = [-\log_2 3; +\infty[$

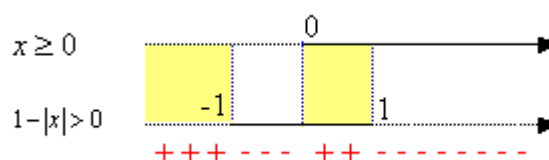
Seconda disequazione

$$\frac{x}{1-|x|} \geq 0$$

Si tratta di una disequazione razionale fratta; si studia il segno del numeratore e quello del denominatore, quindi si passa a determinare il segno della frazione ed individuare infine le soluzioni della disequazione.

Di seguito è riportato un grafico lineare in cui sono evidenziate: le soluzioni delle disequazioni

$x \geq 0$, $1-|x| > 0$, il segno della frazione e sono indicati in colore gli intervalli reali la cui unione rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione fratta in esame.



L'insieme delle soluzioni della disequazione è $S_2 =]-\infty; -1[\cup [0; 1[$.

Intersezione dei due insiemi

L'insieme S delle soluzioni del sistema, e dunque insieme dominio della funzione in esame, è

$$S = S_1 \cap S_2 = [-\log_2 3; -1[\cup [0; 1[$$