

Disequazioni logaritmiche

Risolvere le disequazioni

1. $\frac{\log_2 x - 4(\log_4 x)^2}{1 - \sqrt{x-1}} \geq 0$
2. $\log_9 (2 - 3^x) - x < 0$
3. $(1-x)^{\log_3 \sqrt{1-x}} < \sqrt{3}$
4. $\log_{(3x)} \left(4x - \frac{11}{3} \right) < -1$

Soluzione

1. Cambiando la base del logaritmo $\log_4 x$ portandolo alla base due la disequazione assume la seguente forma

$$\frac{\log_2 x - 4(\log_2 x : \log_2 4)^2}{1 - \sqrt{x-1}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2 x - (\log_2 x)^2}{1 - \sqrt{x-1}} \geq 0$$

La funzione al primo membro esiste se la variabile x verifica il seguente sistema

$$\begin{cases} x > 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 1-\sqrt{x-1} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (x \geq 1) \wedge x \neq 2$$

Studiando il segno del numeratore e del denominatore si ricava:

$$\log_2 x - (\log_2 x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \log_2 x \cdot (1 - \log_2 x) \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq \log_2 x \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2;$$

$$1 - \sqrt{x-1} > 0 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$$

Studiando il prodotto dei segni si deduce infine che la disequazione è soddisfatta in tutto il dominio di definizione, cioè l'insieme delle soluzioni è

$$S = [1; 2[\cup]2; +\infty[$$

$$2. \log_9 (2 - 3^x) - x < 0 \Leftrightarrow \log_9 (2 - 3^x) < x \Leftrightarrow 0 < 2 - 3^x < 9^x \Leftrightarrow \begin{cases} x < \log_3 2 \\ (3^x)^2 + 3^x - 2 > 0 \end{cases}$$

Risolto il sistema di disequazioni si trova come insieme di soluzioni $S =]0; \log_3 2[$

$$3. (1-x)^{\log_3 \sqrt{1-x}} < \sqrt{3}$$

Dominio di definizione della disequazione

Al primo membro della disequazione figura una funzione potenza la cui base deve essere positiva:

$$1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1;$$

questa condizione assicura anche l'esistenza della funzione radice quadrata argomento del logaritmo e la funzione logaritmica stessa; concludiamo che il dominio di definizione della disequazione è $D =]-\infty; 1[$.

Studio della disequazione

Nell'insieme D indicato la funzione potenza assume valori positivi; la disequazione si può trasformare in una equivalente prendendo i logaritmi in base tre dei due membri:

$$\log_3 \left((1-x)^{\log_3 \sqrt{1-x}} \right) < \log_3 \sqrt{3} \Leftrightarrow \log_3 \sqrt{1-x} \cdot \log_3 (1-x) < \frac{1}{2} \log_3 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} \log_3^2(1-x) < \frac{1}{2} \log_3 3 \Leftrightarrow \log_3^2(1-x) < 1 \Leftrightarrow -1 < \log_3(1-x) < 1 \Leftrightarrow 3^{-1} < 1-x < 3 \Leftrightarrow -2 < x < \frac{2}{3}$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = \left] -2; \frac{2}{3} \right[$

4. $\log_{(3x)} \left(4x - \frac{11}{3} \right) < -1$

Domínio di definizione della disequazione

La funzione logaritmica esiste se la variabile x verifica la seguente condizione

$$(3x > 0) \wedge (3x \neq 1) \wedge \left(4x - \frac{11}{3} > 0 \right)$$

che sviluppata diventa $x > \frac{11}{12}$ e perciò il dominio di definizione della disequazione è

$$D = \left] \frac{11}{12}; +\infty \right[.$$

Risoluzione della disequazione

Possiamo trasformare la disequazione logaritmica distinguendo il caso in cui la base del logaritmo è maggiore di uno dal caso in cui è compresa tra zero ed uno. La disequazione è equivalente all'unione logica dei due seguenti sistemi:

$$(A): \begin{cases} 0 < 3x < 1 \\ 4x - \frac{11}{3} > (3x)^{-1} \end{cases} \quad (B): \begin{cases} 3x > 1 \\ 0 < 4x - \frac{11}{3} < (3x)^{-1} \end{cases}$$

Poiché per

$$x > \frac{11}{12} \Rightarrow 3x > \frac{33}{12} > 1, \text{ evidentemente il sistema (A) non va considerato, quindi le}$$

eventuali soluzioni della disequazione devono essere ricercate nell'insieme delle soluzioni del sistema (B).

Osserviamo che della doppia disuguaglianza $0 < 4x - \frac{11}{3} < (3x)^{-1}$, la prima parte

$4x - \frac{11}{3} > 0$ è verificata nel dominio D, quindi è sufficiente considerare la seconda

parte

$$4x - \frac{11}{3} < (3x)^{-1}$$

che con la condizione $3x > 1$ si trasforma nella disequazione intera equivalente

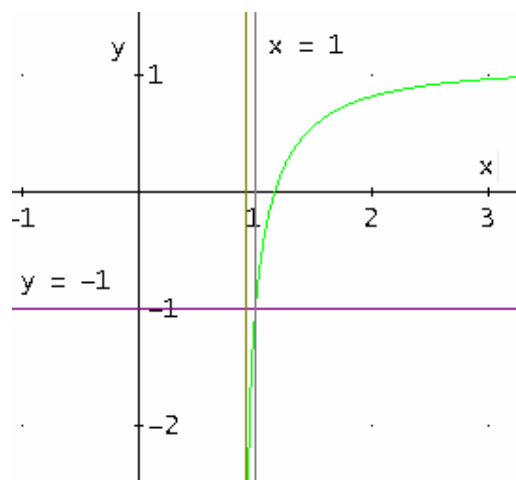
$$12x^2 - 11x - 1 < 0.$$

L'equazione di secondo grado associata

$$12x^2 - 11x - 1 = 0 \quad \text{ammette come}$$

$$\text{radici } x_1 = -\frac{1}{12}; x_2 = 1;$$

e quindi la disequazione in esame è



soddisfatta nell'intervallo $\left]-\frac{1}{12}; 1\right[$. L'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è dato dall'intersezione dell'intervallo trovato con il dominio D.

$$S = \left]-\frac{1}{12}; 1\right[\cap \left[\frac{11}{12}; +\infty\right[= \left[\frac{11}{12}; 1\right[$$

Nella figura riportata si può osservare una parte del diagramma della funzione

$$y = \log_{(3x)}\left(4x - \frac{11}{3}\right) \text{ indicato con colore verde; sono indicate anche le rette parallele}$$

all'asse delle ordinate di equazioni $x = \frac{11}{12}$; $x = 1$; la parte di curva che ricade

internamente alla striscia delimitata da dette rette è composta da punti la cui ordinata è minore di uno.