

Disequazioni esponenziali

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali

- | | |
|--|---|
| a) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-\frac{1}{x}} > \frac{9}{4},$ | R. $S =]-\infty; -1-\sqrt{2}[\cup]0; \sqrt{2}-1[$ |
| b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq 8^{\frac{x}{2x-1}},$ | R. $S = [-1; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[$ |
| c) $\frac{4^{\sqrt{x+1}}-8}{3^{x^2}-3^x} \geq 0,$ | R. $S =]0; 1[\cup \left[\frac{5}{4}; +\infty\right[$ |
| d) $\frac{\sqrt[4]{2^{2x}+2 \cdot 4^x+10}-2}{5^{1-2x}-5^{2x}+4} \leq 0,$ | R. $S = R - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ |
| e) $\frac{\sqrt{3+\sqrt{1- x }}-2}{3^{-x^2}-1} < 0,$ | R. $S = \emptyset$ |

Soluzione

- a) Trasformiamo la disequazione riconducendola al confronto di due potenze aventi la stessa base.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-\frac{1}{x}} > \frac{9}{4} \text{ diventa } \left(\frac{2}{3}\right)^{x-\frac{1}{x}} > \left(\frac{3}{2}\right)^2, \text{ che si può scrivere anche nella forma } \left(\frac{2}{3}\right)^{x-\frac{1}{x}} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}.$$

Ricordando che **la funzione esponenziale avente base compresa nell'intervallo]0;1[è strettamente decrescente** deduciamo che la disuguaglianza ottenuta è soddisfatta per i valori della variabile che soddisfano la disequazione

$$x - \frac{1}{x} < -2, \text{ che ridotta alla forma normale diventa}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} < 0 \tag{1}$$

Studio del segno del numeratore

$$x^2 + 2x - 1 > 0 \tag{2}$$

L'equazione associata $x^2 + 2x - 1 = 0$ ammette come radici $x = -1 \pm \sqrt{2}$. La disequazione (2) è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici: $(x < -1 - \sqrt{2}) \vee (x > -1 + \sqrt{2})$.

Confrontando il segno del numeratore e del denominatore della frazione al primo membro della (1) si riconosce che la disuguaglianza (1) è soddisfatta nell'insieme

$$S =]-\infty; -1 - \sqrt{2}[\cup]0; \sqrt{2} - 1[.$$

b) La disequazione può essere trasformata come segue

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \geq 8^{\frac{x}{2x-1}}, \text{ diventa } 2^{-\frac{1}{x}} \geq 2^{\frac{3x}{2x-1}}, \text{ che è equivalente alla disequazione}$$

$$-\frac{1}{x} \geq \frac{3x}{2x-1},$$

che ridotta alla forma normale assume la forma

$$\frac{3x^2 + 2x - 1}{x(2x - 1)} \leq 0 \quad (1)$$

Studio del segno del numeratore

$$3x^2 + 2x - 1 \geq 0, \quad (2)$$

L'equazione associata $3x^2 + 2x - 1 = 0$ ammette come radici $x_1 = -1, x_2 = \frac{1}{3}$; la disequazione (2)

è soddisfatta per i valori reali di x tali che: $(x \leq -1) \vee \left(x \geq \frac{1}{3}\right)$.

Studio del segno del denominatore

$$x(2x - 1) > 0 \quad (3)$$

La disequazione (3) è soddisfatta per i valori di x tali che $(x < 0) \vee \left(x > \frac{1}{2}\right)$.

Eseguendo il confronto dei segni del numeratore e del denominatore si conclude che la

disequazione (1) soddisfatta nell'insieme $S = [-1; 0[\cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[$.

c) La disequazione si può elaborare come segue

$$\frac{4^{\sqrt{x+1}} - 8}{3^{x^2} - 3^x} \geq 0, \text{ diventa } \frac{2^{2\sqrt{x+1}} - 2^3}{3^{x^2} - 3^x} \geq 0 \quad (1)$$

Osservazione

Prima di procedere con lo studio del segno del numeratore e del denominatore precisiamo che la frazione presente al primo membro della (1) esiste sotto le condizioni

c.1) $x+1 \geq 0$, perché $x+1$ è argomento di una radice di indice pari,

c.2) $3^{x^2} - 3^x \neq 0$, perché il denominatore della frazione deve essere diverso da zero.

Le due condizioni sono soddisfatte nell'insieme $D = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geq -1) \wedge (x \neq 0) \wedge (x \neq 1)\}$, che rappresenta il dominio di definizione.

Studio del segno del numeratore

$2^{2\sqrt{x+1}} - 2^3 \geq 0$ che scriviamo nella forma

$$2^{2\sqrt{x+1}} \geq 2^3 \quad (2)$$

Poiché la funzione esponenziale $y = a^x$, con base $a > 1$, è strettamente crescente, la disequazione (2) è equivalente alla seguente

$$2\sqrt{x+1} \geq 3, \quad (2.1)$$

per la quale si ha

$$\sqrt{x+1} \geq \frac{3}{2}, \text{ quindi } x+1 \geq \frac{9}{4}, \text{ da cui } x \geq \frac{5}{4}.$$

Studio del segno del denominatore

$$3^{x^2} - 3^x > 0 \quad (3)$$

La disequazione, equivalente alla seguente

$$3^{x^2} > 3^x, \text{ si trasforma a sua volta nella disequazione}$$

$$x^2 > x, \text{ che scriviamo nella forma}$$

$$x(x-1) > 0, \text{ soddisfatta per i valori della variabile } (x < 0) \vee (x > 1).$$

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore della frazione in (1) e tenendo conto del dominio di definizione D, si deduce che la disequazione in esame è soddisfatta nell'insieme

$$S =]0;1[\cup \left[\frac{5}{4}; +\infty[$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt[4]{2^{2x} + 2 \cdot 4^x + 10} - 2}{5^{1-2x} - 5^{2x} + 4} \leq 0$$

Premessa sull'insieme di definizione della frazione

La frazione presente al primo membro esiste per i valori della variabile x che verificano le due condizioni

d.1) $2^{2x} + 2 \cdot 4^x + 10 \geq 0$, perché l'argomento di una radice di indice pari deve essere non negativo. Si riconosce che la disuguaglianza è soddisfatta da ogni $x \in \mathbb{R}$.

d.2) $5^{1-2x} - 5^{2x} + 4 \neq 0$; in seguito riconosceremo che la condizione è soddisfatta da ogni $x \neq \frac{1}{2}$.

Studio del segno del numeratore

La disuguaglianza

$$\sqrt[4]{2^{2x} + 2 \cdot 4^x + 10} - 2 \geq 0 \quad (1)$$

si trasforma nella seguente

$\sqrt[4]{2^{2x} + 2 \cdot 4^x + 10} \geq 2$, che possiamo elaborare elevando i due membri alla quarta potenza:

$2^{2x} + 2 \cdot 4^x + 10 \geq 16$, da cui

$2^{2x} + 2 \cdot (2^2)^x \geq 6$, quindi $3 \cdot 2^{2x} \geq 6$, e ancora $2^{2x} \geq 2$, soddisfatta per $x \geq \frac{1}{2}$.

Studio del segno del denominatore

Scriviamo la disuguaglianza

$$5^{1-2x} - 5^{2x} + 4 > 0, \quad (2)$$

che diventa

$$5 \cdot 5^{-2x} - 5^{2x} + 4 > 0, \quad (2.1)$$

che con $5^{2x} = t$ diventa

$$\frac{5}{t} - t + 4 > 0, \quad (2.2)$$

nella quale risulta $t > 0$.

Elaborando la (2.2) otteniamo

$\frac{t^2 - 4t - 5}{t} < 0$, che per la condizione $t > 0$ diventa equivalente alla disequazione

$$t^2 - 4t - 5 < 0 \quad (2.3)$$

La (2.3) è soddisfatta dai valori della variabile t tali che $-1 < t < 5$; questa doppia disuguaglianza, per la condizione $t > 0$, si riduce alla seguente $0 < t < 5$.

Da $t < 5$ si ricava $5^{2x} < 5$, quindi $2x < 1$ e perciò la (2) è soddisfatta dai valori di x tali che $x < \frac{1}{2}$.

Osserviamo a questo punto che l'uguaglianza $5^{1-2x} - 5^{2x} + 4 = 0$ si verifica solo per $x = \frac{1}{2}$, e perciò la condizione di esistenza d.2) è soddisfatta per ogni $x \neq \frac{1}{2}$.

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore della frazione al primo membro della disequazione in esame si riconosce che:

per $x < 1/2$ il numeratore è negativo e il denominatore è positivo, perciò la frazione assume valore negativo;

per $x > 1/2$ il numeratore è positivo e il denominatore è negativo, quindi la frazione assume ancora valore negativo.

In conclusione, per ogni $x \neq \frac{1}{2}$ la frazione assume valore negativo e quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = R - \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

e)
$$\frac{\sqrt{3 + \sqrt{1 - |x|}} - 2}{3^{-x^2} - 1} < 0$$

Condizioni di esistenza

Notiamo che deve essere soddisfatta la condizione

$$1 - |x| \geq 0,$$

per l'esistenza della forma radicale presente al numeratore. La condizione è verificata per ogni x tale che $-1 \leq x \leq 1$.

Il denominatore della frazione deve essere diverso da zero:

$3^{-x^2} - 1 \neq 0$, equivalente alla relazione $3^{-x^2} \neq 1$, che è soddisfatta per ogni $x \neq 0$.

In definitiva la frazione presente nella disequazione esiste nel dominio $D = [-1; 1] - \{0\}$.

Studio del segno del numeratore

$$\sqrt{3 + \sqrt{1 - |x|}} - 2 > 0, \quad (1)$$

diventa

$\sqrt{3 + \sqrt{1 - |x|}} > 2$, ed elevando al quadrato e riducendola diventa

$\sqrt{1 - |x|} > 1$. Questa disuguaglianza non è verificata per alcun valore di x , quindi il numeratore della frazione nel dominio D assume solo valori negativi.

Studio del segno del denominatore

Osserviamo che

$3^{-x^2} - 1 > 0$, diventa $3^{-x^2} > 1$ e questa disuguaglianza non è verificata per alcun valore reale di x , dunque il denominatore nel dominio di definizione assume solo valori negativi.

Conclusione

Nel dominio di definizione della frazione sia il numeratore, sia il denominatore assumono valori negativi e perciò la frazione assume valore positivo. Concludiamo che la disuguaglianza in esame non è soddisfatta per alcun valore reale: $S = \emptyset$.