

Disuguaglianza esponenziale

(Risoluzione algebrica ed interpretazione grafica)

Prima parte

Risolvere la seguente disuguaglianza esponenziale

$$2^{2-x^2} < \frac{2}{9} \cdot 3^{x+1}$$

Seconda parte

Riconosciuto che la disuguaglianza può essere scritta nella forma equivalente

$$2^{1-x^2} < 3^{x-1}$$

rappresentare in un piano riferito ad un sistema di riferimento cartesiano le curve esponenziali aventi equazioni cartesiane $y = 2^{1-x^2}$, $y = 3^{x-1}$ dopo aver determinato un congruo numero di punti dei rispettivi diagrammi ed interpretare graficamente le soluzioni trovate per la disuguaglianza affrontata nella prima parte dell'esercizio.

Soluzione

Prima parte

La disuguaglianza si può trasformare e ridurla alla forma seguente

$$2^{1-x^2} < 3^{x-1} \quad (1)$$

Poiché le due potenze hanno basi diverse decidiamo di procedere passando ai logaritmi naturali dei due membri conservando il verso della disuguaglianza giacché la base del sistema di logaritmi è il numero di Nepero $e=2,7182...>1$.

$$\log(2^{1-x^2}) < \log(3^{x-1}) \Leftrightarrow (1-x^2) \cdot \log 2 < (x-1) \cdot \log 3 \Leftrightarrow$$

$$(\log 2) \cdot x^2 + (\log 3) \cdot x - \log 2 - \log 3 > 0 \quad (2)$$

La (4.2) è equivalente alla (4.1)

Occorre trovare le radici dell'equazione associata

$$(\log 2) \cdot x^2 + (\log 3) \cdot x - \log 2 - \log 3 = 0 \quad (3)$$

per il cui discriminante si ha

$$\Delta = (\log 3)^2 + 4 \log 2 \cdot (\log 2 + \log 3) = (\log 3)^2 + 4 \log 2 \cdot \log 3 + 4 (\log 2)^2 = (\log 3 + 2 \log 2)^2$$

Le due radici sono

$$x = \frac{-(\log 3) \pm \sqrt{(\log 3 + 2 \log 2)^2}}{2 \log 2} = \frac{-(\log 3) \pm (\log 3 + 2 \log 2)}{2 \log 2} \Rightarrow$$

$$x_1 = -1 - \frac{\log 3}{\log 2}, \quad x_2 = 1$$

La disuguaglianza (2) è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici della (3), quindi l'insieme delle soluzioni è

$$S = \left] -\infty; -1 - \frac{\log 3}{\log 2} \right[\cup] 1; +\infty [$$

Seconda parte

Nella finestra grafica riportata di seguito, dedotta da un'elaborazione con l'applicazione Derive, sono rappresentate le curve esponenziali γ_1 , γ_2 di equazioni cartesiane

$$\gamma_1 : y = 2^{1-x^2}$$

$$\gamma_2 : y = 3^{x-1}$$

Si vede che le due curve si intersecano in due punti, dei quali uno è il punto A(1;1); del secondo punto B i valori approssimati delle coordinate sono $x_B = -2,58496$,

$$y_B = 0,019478$$

leggibili anche nella barra di stato della finestra grafica.

L'insieme delle soluzioni della disequazione è costituito dall'unione dei due intervalli nei quali i punti di γ_1 hanno ordinata minore dei corrispondenti punti della curva γ_2 .

Nella finestra è ben visibile la parte delle soluzioni per $x > 1$, mentre l'intervallo

definito da $x < -1 - \frac{\log 3}{\log 2}$ si

può solo immaginare. Per visualizzare parzialmente anche questo intervallo occorrerebbe produrre uno zoom dell'elaborazione grafica. Invitiamo il lettore esperto nell'utilizzo di Derive a realizzare come esercizio una rappresentazione grafica migliorativa di quella riportata.



