

Disequazioni esponenziali

Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali

$$\begin{array}{lll} 1. & 3^{1-x} > \frac{3^x - 2}{4} & 2. & \left(\frac{3}{4}\right)^{3x} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1-2x} & 3. & \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{\sqrt{x}} \\ 4. & 5^x - 10^x \geq 4 - 2^{x+2} & & & & \end{array}$$

Soluzione

1

$$3^{1-x} > \frac{3^x - 2}{4}$$

La disequazione si può trasformare come segue

$$\begin{aligned} 3^{1-x} > \frac{3^x - 2}{4} &\Leftrightarrow 4 \cdot 3^{1-x} - 3^x + 2 > 0 \Leftrightarrow \frac{12}{3^x} - 3^x + 2 > 0 \Leftrightarrow 12 - (3^x)^2 + 2 \cdot 3^x > 0 \\ &\Leftrightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 12 < 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ponendo ora

$$3^x = t \quad (1.2)$$

ricaviamo la disequazione di secondo grado

$$t^2 - 2t - 12 < 0. \quad (1.3)$$

L'equazione associata

$$t^2 - 2t - 12 = 0 \quad (1.4)$$

ammette come radici $t_1 = 1 - \sqrt{13}; t_2 = 1 + \sqrt{13}$.

La disequazione (1.3) è soddisfatta per valori interni all'intervallo delle radici della (1.4), quindi nell'insieme $T = \{t \in \mathbb{R} \mid (1 - \sqrt{13} < t < 1 + \sqrt{13})\}$.

Ritornando alla variabile x , osserviamo che $1 - \sqrt{13} < 0$ e quindi la disuguaglianza $3^x > 1 - \sqrt{13}$ è soddisfatta su tutto l'asse reale; per la seconda disuguaglianza si ha $t < 1 + \sqrt{13} \Leftrightarrow 3^x < 1 + \sqrt{13}$ che è soddisfatta per $x < \log_3(1 + \sqrt{13})$. Possiamo allora concludere che entrambe le disuguaglianze sono soddisfatte per $x < \log_3(1 + \sqrt{13})$ e che quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione (1.1) è $S =]-\infty; \log_3(1 + \sqrt{13})[$.

2

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x} > \left(\frac{4}{3}\right)^{1-2x}$$

La disequazione si può scrivere come disuguaglianza tra due potenze aventi la stessa base

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x} > \left(\frac{3}{4}\right)^{-(1-2x)} \quad (2.1)$$

Osservato che il valore della base delle potenze è compresa tra zero ed uno deduciamo immediatamente che la disequazione è equivalente alla seguente

$$3x < -(1-2x) \Leftrightarrow x < 1.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è dunque $S =]-\infty; -1[$

3

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{\sqrt{x}}$$

La disequazione si può porre nella seguente forma

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2\sqrt{x}}, \text{ equivalente alla disequazione}$$

$$3-x \geq 2\sqrt{x}$$

che a sua volta è equivalente al seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ (2\sqrt{x})^2 \leq (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 4x \leq 9-6x+x^2 \end{cases}$$

La disequazione di secondo grado ottenuta diventa

$$x^2 - 10x + 9 \geq 0$$

che è soddisfatta per $(x \leq 1) \vee (x \geq 9)$.

Intersecando i due insiemi numerici si ricava l'insieme delle soluzioni del sistema e dunque della disequazione in esame:

$$S = [0; 3] \cap (]-\infty; 1] \cup [9; +\infty[) = [0; 1]$$

4

$$5^x - 10^x \geq 4 - 2^{x+2}$$

La disequazione si può scrivere nella seguente forma

$$5^x(1-2^x) \geq 4(1-2^x)$$

e procedendo ancora si ottiene

$$(1-2^x)(5^x-4) \geq 0 \quad (4.1)$$

Per trovare le soluzioni di questa disequazione si studia il segno di ciascun fattore presente al primo membro e si effettua il prodotto dei segni per ogni x reale.

$$1-2^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$$

$$5^x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \log_5 4$$

Osserviamo che $\log_5 4 > 0$. Nel grafico a lato è riportato lo studio del prodotto dei segni. La disequazione in esame è soddisfatta nell'intervallo $[0; \log_5 4]$ che in figura è riportato in colore.

