

Disequazione logaritmica¹

Risolvere la disequazione

$$\frac{1}{4}\log_2(x+1) > \frac{1}{3}\log_4(x\sqrt{x}+1)$$

Soluzione

Determiniamo innanzitutto il dominio di definizione della disequazione, ovvero l'insieme dei valori che possono essere assunti dalla variabile affinché la disequazione abbia senso.

La presenza di x sotto ad un radicale quadratico implica che debba essere $x \geq 0$; con questa limitazione risultano essere strettamente positivi anche gli argomenti dei due logaritmi. Dunque, il dominio di definizione è $D=[0;+\infty[$.

Prima di passare alle elaborazioni della disequazione osserviamo che il valore $x=0$ non è soluzione della disequazione perché per detto valore si ottiene $0 > 0$, disuguaglianza non vera.

Ciò premesso, limitiamo la ricerca delle eventuali soluzioni della disequazione all'intervallo $D'=[0;+\infty[$.

Per risolvere la disequazione è necessario ricondurre i due logaritmi alla stessa base: scegliamo la base 2. La disequazione assume la seguente forma

$$\frac{1}{4}\log_2(x+1) > \frac{1}{3} \cdot \frac{\log_2(x\sqrt{x}+1)}{\log_2 4}, \text{ da cui}$$

$$3\log_2(x+1) > \frac{4}{3} \cdot \log_2(x\sqrt{x}+1) \quad \text{e quindi} \quad \log_2(x+1)^3 > \log_2(x\sqrt{x}+1)^2.$$

Poiché la base dei logaritmi è maggiore di uno e gli argomenti degli stessi nel dominio di lavoro sono strettamente positivi la disequazione logaritmica si trasforma nella disequazione che si ottiene imponendo che sia soddisfatta la disuguaglianza dello stesso verso tra i due argomenti. Dunque si ottiene la disequazione equivalente:

$$(x+1)^3 > (x\sqrt{x}+1)^2;$$

dopo opportune semplificazioni diventa

$$3x(x+1) > 2x\sqrt{x}.$$

Poiché abbiamo precisato che $x > 0$, si può semplificare nei due membri il fattore x e continuare elevando al quadrato. Si ha

$$9(x+1)^2 > 4x \rightarrow 9x^2 + 14x + 9 > 0$$

La disequazione di secondo grado ottenuta ha il discriminante negativo: $\frac{\Delta}{4} = 49 - 81 = -32$ e quindi è soddisfatta da ogni x reale.

Conclusione

Tenendo conto del dominio di definizione della disequazione logaritmica, ed avendo precisato che $x=0$ non è soluzione della disequazione, concludiamo l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è $S=D'=[0;+\infty[$.

¹ Richiesta dall'utente della rete max12041991...