

Diseguazioni esponenziali e logaritmiche

Risolvere le seguenti disequazioni

$$1) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{x-1}}; \quad 2) \quad 2\left[\log_{0,5}\left(x+\frac{1}{x}\right)\right]^2 - 3\log_{0,5}\left(x+\frac{1}{x}\right) - 20 > 0$$

Soluzione

- 1) Si può elaborare la disequazione esponenziale come di seguito indicato

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{x-1}} &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{x-1}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x-1}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{2}} > \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{x-1}+1} \\ &\Leftrightarrow x - \frac{1}{2} > \frac{3}{x-1} + 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 5x - 3}{2(x-1)} > 0 \end{aligned}$$

$$\text{L'insieme delle soluzioni è } S = \left]-\frac{1}{2}; 1\right[\cup]3; +\infty[.$$

- 2) Per risolvere la disequazione conviene effettuare una sostituzione di variabile; poniamo

$$\log_{0,5}\left(x+\frac{1}{x}\right) = y \text{ ed otteniamo la disequazione}$$

$$2y^2 - 3y - 20 > 0, \text{ che è soddisfatta per } \left(y < -\frac{5}{2}\right) \vee (y > 4).$$

Risolviamo le due disequazioni corrispondenti nell'incognita x .

$$\log_{0,5}\left(x+\frac{1}{x}\right) < -\frac{5}{2} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x} > (0,5)^{-\frac{5}{2}} \Leftrightarrow x+\frac{1}{x} > 2^{\frac{5}{2}} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4\sqrt{2}x + 1}{x} > 0$$

$$\text{questa disequazione è soddisfatta nell'insieme } S_1 =]0 < x < 2\sqrt{2} - \sqrt{7}[\cup]2\sqrt{2} - \sqrt{7}; +\infty[;$$

per la seconda disequazione si ha

$$\log_{0,5}\left(x+\frac{1}{x}\right) > 4 \Leftrightarrow 0 < x+\frac{1}{x} < (0,5)^4 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+1}{x} > 0 \\ x+\frac{1}{x} < \frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 16x^2 - x + 16 < 0 \end{cases}$$

Il sistema ottenuto non ha soluzioni.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è S_1 .