

Algebra

Diseguazioni irrazionali

Es_3)(m)

3.1 Discutere e risolvere la disequazione parametrica $\sqrt{4k^2 - x^2} \geq 2k + x$, con $k \in \mathbb{R}$

3.2 Risolvere la disequazione irrazionale $3\sqrt{5x-4} < 4\sqrt{5+\sqrt{5x-4}}$

3.3 Risolvere la disequazione irrazionale $\sqrt{x^2+x-1} \geq \sqrt{x-1} + x$

Soluzione

3.1 $\sqrt{4k^2 - x^2} \geq 2k + x$, con $k \in \mathbb{R}$

Per risolvere la disequazione proposta è necessario innanzitutto stabilire il suo dominio di definizione, cioè stabilire quali valori possono essere attribuiti alla variabile x in modo che la stessa abbia senso. La presenza del radicale di indice pari richiede che il radicando sia non negativo, perciò che sia soddisfatta la seguente disequazione

$$4k^2 - x^2 \geq 0 \quad (a)$$

Questa è soddisfatta

- per i valori reali di x che verificano la doppia disuguaglianza $-2k \leq x \leq 2k$, se $k \geq 0$;
- per i valori reali di x che verificano la doppia disuguaglianza $2k \leq x \leq -2k$, se $k < 0$;

Studiamo dunque i diversi casi

Caso $k=0$

La disequazione diventa

$$\sqrt{-x^2} \geq x$$

Il dominio di questa disequazione è $D = \{0\}$ ed $x=0$ è anche soluzione, dunque l'insieme delle soluzioni è proprio $D = \{0\}$.

Caso $k>0$

La disequazione è equivalente all'unione logica dei due sistemi:

$$I_1 : \begin{cases} 4k^2 - x^2 \geq 0 \\ 2k + x < 0 \end{cases}, \quad I_2 : \begin{cases} 2k + x \geq 0 \\ 4k^2 - x^2 \geq (2k + x)^2 \end{cases}$$

Risoluzione del sistema I_1 .

La prima disequazione rappresenta la condizione di esistenza della disequazione di partenza, dunque è soddisfatta nell'intervallo $[-2k; 2k]$. La seconda disequazione è soddisfatta per $x < -2k$. Le due disequazioni non hanno alcuna soluzione comune, quindi l'insieme delle soluzioni del sistema è vuoto: $S_1 = \emptyset$.

Risoluzione del sistema I_2

La prima disequazione è soddisfatta per $x \geq -2k$.

La seconda disequazione si riconduce alla disequazione equivalente

$$x(x+2k) \leq 0,$$

che, per le ipotesi poste su k , ha come insieme di soluzioni $[-2k; 0]$.

L'intersezione degli insiemi di soluzioni delle due disequazioni, e quindi l'insieme delle soluzioni del sistema, è $S_2 = [-2k; 0]$.

Conclusione

L'insieme delle soluzioni della disequazione (3.1) per $k > 0$ è $S = S_1 \cup S_2 = [-2k; 0]$

Caso $k < 0$

Riportiamo solo la conclusione lasciando al lettore il compito di verificare l'affermazione.

L'insieme delle soluzioni della disequazione (3.1) è $S = [2k; -2k]$

3.2 $3\sqrt{5x-4} < 4\sqrt{5+\sqrt{5x-4}}$

La disequazione è irrazionale intera ed ha senso per i valori della variabile che verificano la condizione

$$5x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{5}$$

Dunque le eventuali soluzioni vanno ricercate nel dominio $A = \left[\frac{4}{5}; +\infty \right[$.

Osserviamo che la presenza del radicale $\sqrt{5x-4}$ nei due membri suggerisce che si può semplificare la forma algebrica ponendo $\sqrt{5x-4} = t$, con $t \geq 0$. Affrontiamo dunque la disequazione nella variabile t :

$$3t < 4\sqrt{5+t}, \text{ con } t \geq 0.$$

La disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} (3t)^2 < (4\sqrt{5+t})^2 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9t^2 - 16t - 80 < 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$$

Le radici dell'equazione di secondo grado $9t^2 - 16t - 80 = 0$ sono $t_1 = -\frac{20}{9}$, $t_2 = 4$ e dunque la prima disequazione del sistema ammette come insieme di soluzioni $\left] -\frac{20}{9}; 4 \right[$; tenendo conto della seconda disequazione si deduce che l'insieme delle soluzioni del sistema è l'intervallo $[0; 4[$.

A questo punto è necessario ritornare alla variabile x .

I valori di x devono verificare la doppia disuguaglianza

$$0 \leq \sqrt{5x-4} < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-4} \geq 0 \\ \sqrt{5x-4} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{5} \\ 5x-4 < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{4}{5} \\ x < 4 \end{cases}$$

Conclusione

L'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è l'intervallo $\left[\frac{4}{5}; 4 \right[$

3.3 $\sqrt{x^2+x-1} \geq \sqrt{x-1} + x$

Il dominio di definizione della disequazione è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} x^2+x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} . \text{ Risolto il sistema si trova che il dominio è l'intervallo } [1; +\infty[.$$

Analizzando la disequazioni si deduce immediatamente che nel dominio indicato essa è equivalente alla disequazione che si ricava elevando ambo i membri al quadrato. Si ha:

$$x^2+x-1 \geq x-1+2x\sqrt{x-1}+x^2 \Leftrightarrow 2x\sqrt{x-1} \leq 0$$

Si nota che questa disequazione, nel dominio $[1; +\infty[$, è soddisfatta solo dal punto $x=1$.

Concludiamo perciò che l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è $S = \{1\}$.