

ALGEBRA

Diseguazioni esponenziali e logaritmiche¹

Es_1) Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $3^{x^2-3x} \geq \sqrt[3]{9^{x-\frac{5}{3}}}$ b) $\frac{\log_3 x - 1}{\log_9 x + 1} + \frac{\log_3 x}{5 \log_9 x} \geq 0$ c) $\log_{(1-9x^2)} 4x \geq \frac{1}{2}$

Soluzione

- a) La disequazione si può elaborare applicando le proprietà delle potenze e riconducendola ad una forma più semplice.

$$3^{x^2-3x} \geq \sqrt[3]{(3^2)^{x-\frac{5}{3}}} \rightarrow 3^{x^2-3x} \geq \sqrt[3]{3^{2x-\frac{10}{3}}} \rightarrow 3^{x^2-3x} \geq 3^{\left(2x-\frac{10}{3}\right)\frac{1}{3}}$$

Poiché si è ottenuta una disuguaglianza tra due potenze aventi la stessa base maggiore di uno la disequazione si trasforma in una equivalente passando alla disuguaglianza dello stesso verso tra gli esponenti:

$$x^2 - 3x \geq \left(2x - \frac{10}{3}\right) \cdot \frac{1}{3} \rightarrow 9x^2 - 33x + 10 \geq 0$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado associata si determinano le due radici:

$$x_2^1 = \frac{33 \pm 27}{10} \rightarrow x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{10}{3}$$

Conclusione

La disequazione esponenziale è soddisfatta nell'insieme $S = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{10}{3}; +\infty\right[$.

- b) Nella disequazione compaiono logaritmi in base diversa; è consigliabile trasformare i logaritmi in base 9 nei corrispondenti logaritmi in base 3 utilizzando la proprietà per il cambiamento di base: $\log_9 x = \frac{\log_3 x}{\log_3 9} = \frac{1}{2} \log_3 x$.

Elaboriamo ora la disequazione.

$$\frac{\log_3 x - 1}{\log_9 x + 1} + \frac{\log_3 x}{5 \log_9 x} \geq 0 \rightarrow \frac{\log_3 x - 1}{\frac{1}{2} \log_3 x + 1} + \frac{\log_3 x}{\frac{5}{2} \log_3 x} \geq 0 \quad \text{Con la condizione di equivalenza}$$

(C.Eq.) $\log_3 x \neq 0$, cioè per $x \neq 1$, la disequazione diventa:

$$\frac{2(\log_3 x - 1)}{\log_3 x + 2} + \frac{2}{5} \geq 0 \rightarrow \frac{10 \log_3 x - 10 + 2 \log_3 x + 4}{5(\log_3 x + 2)} \geq 0 \rightarrow \frac{2 \log_3 x - 1}{5(\log_3 x + 2)} \geq 0$$

Studio del segno del numeratore e del denominatore.

$$2 \log_3 x - 1 \geq 0 \rightarrow \log_3 x \geq \frac{1}{2} \rightarrow x \geq \sqrt{3};$$

$$\log_3 x + 2 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{9}$$

Confrontando i segni del numeratore e del denominatore e tenendo conto delle condizioni di esistenza si ricava il dominio delle soluzioni: $S = \left]0; \frac{1}{9}\right[\cup \left[\sqrt{3}; +\infty\right[$.

c) $\log_{(1-9x^2)} 4x \geq \frac{1}{2}$

¹ Esercizi assegnati nel compito in classe M6_4E-13-05-10

Osserviamo che per il dominio di definizione deve risultare necessariamente $x > 0$ e dunque la base del logaritmo può essere solo compresa nell'intervallo $]0;1[$. Ciò premesso, tenendo conto che la funzione logaritmo avente base $a \in]0;1[$ è strettamente decrescente, la disequazione si trasforma in un sistema come segue:

$$\log_{(1-9x^2)} 4x \geq \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} 1-9x^2 > 0 \\ 0 < 4x \leq (1-9x^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{3} \\ 25x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \rightarrow 0 < x < \frac{1}{5}$$