

ALGEBRA

Disequazioni logaritmiche ed esponenziali- Risoluzione grafica di disequazioni⁽¹⁾

a) $2^{\frac{x^2-21}{4}} \leq \frac{2}{8^{5-x}}$

Soluzione

Applicando le proprietà delle potenze la disequazione si riconduce alla forma

$2^{\frac{x^2-21}{4}} \leq 2^{3x-14}$. La disequazione ha senso su tutto l'asse reale e poiché le basi delle due potenze sono uguali e maggiori di uno, la disequazione è equivalente alla seguente:

$\frac{x^2-21}{4} \leq 3x-14$, che diventa $x^2-12x+35 \leq 0$; quest'ultima è soddisfatta nell'intervallo $[5;7]$, che rappresenta anche l'insieme delle soluzioni della disequazione in oggetto.

* * * * *

b) $\log_{(0,25x)}(x^2-x) > 1$

Soluzione

La disequazione ha senso sotto le condizioni

$$(x^2-x > 0) \wedge (0,25x > 0) \wedge (0,25x \neq 1)$$

che sviluppate forniscono l'insieme $D =]1;4[\cup]4;+\infty[$.

Nel dominio D, per risolvere la disequazione occorre distinguere il sottoinsieme in cui la base del logaritmo è maggiore di uno da quello in cui la stessa è compresa tra 0 e 1. Poiché $0,25x > 1$ per $x > 4$, in pratica occorre affrontare la disequazione in ciascuno dei due intervalli $]1;4[$, $]4;+\infty[$.

Per $x \in]1;4[$ la disequazione è equivalente alla seguente:

$$x^2-x < 0,25x \quad \text{che diventa} \quad x^2-\frac{5}{4}x < 0, \text{ soddisfatta per } 0 < x < \frac{5}{4}.$$

Deduciamo che nell'intervallo in esame l'insieme delle soluzioni è $S_1 = \left]1; \frac{5}{4}\right[$.

Per $x \in]4;+\infty[$ la disequazione è equivalente alla seguente:

⁽¹⁾ Esercizi assegnati nella prova di recupero debiti nella classe 4E il 4-set-2010

$x^2 - x > 0,25x$ che diventa $x^2 - \frac{5}{4}x > 0$ che è soddisfatta per $(x < 0) \vee (x > \frac{5}{4})$. Dunque nell'intervallo in esame l'insieme delle soluzioni è $S_2 =]4; +\infty[$.

Conclusione

L'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è: $S = S_1 \cup S_2 = \left]1; \frac{5}{4}\right[\cup]4; +\infty[$

* * * * *

c) Dopo aver rappresentato la curva logaritmica avente equazione $y = \log_3(4x+1)$, determinare le soluzioni della disequazione $\log_3(4x+1) > x$.

Soluzione

La disequazione è soddisfatta nell'intervallo $]0; 2[$.
Nella figura a lato si riconosce che nell'intervallo indicato i punti della curva logaritmica hanno ordinata maggiore dei corrispondenti punti della retta di equazione $y=x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante).

