

ALGEBRA

Equazioni logaritmiche, esponenziali- Disequazione irrazionale ⁽¹⁾

$$a) \frac{1+\log_2 x}{5-\log_2 x} - \frac{2+\log_2 x}{2\log_2 x} = 0 \rightarrow \frac{2\log_2 x(1+\log_2 x) - (5-\log_2 x)(2+\log_2 x)}{2\log_2 x(5-\log_2 x)} = 0$$

Con le condizioni di equivalenza $\log_2 x \neq 0$, $\log_2 x \neq 5$, l'equazione si riconduce alla seguente

$$3(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 10 = 0, \text{ da cui } (\log_2 x = 2) \vee \left(\log_2 x = -\frac{5}{3}\right), \text{ dalle quali si ricavano i valori}$$

$x_1 = 4$, $x_2 = 2^{-\frac{5}{3}}$, che verificano le condizioni imposte e quindi si accettano come soluzioni dell'equazione.

$$b) \left(\frac{9}{16}\right)^x - \left(\frac{3}{4}\right)^x - 12 = 0 \rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{4}\right)^x - 12 = 0.$$

$$\text{Con } \left(\frac{3}{4}\right)^x = y \rightarrow y^2 - y - 12 = 0 \rightarrow y_1 = -3, y_2 = 4.$$

Il valore y_1 evidentemente non fornisce alcuna soluzione, mentre da y_2 si ha

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = 4 \rightarrow x = \frac{\log 4}{\log 3 - \log 4}.$$

$$c) 2^{\frac{x^2-21}{4}} = \frac{2}{8^{5-x}}$$

Applicando le proprietà delle potenze l'equazione si riconduce alla forma seguente

$$2^{\frac{x^2-21}{4}} = 2^{3x-14} \text{ che è soddisfatta se e solo se gli esponenti delle due potenze sono uguali. Dunque: } \frac{x^2-21}{4} = 3x-14 \rightarrow x^2 - 12x + 35 = 0; \text{ le radici di quest'equazione sono } x_1 = 5, x_2 = 7, \text{ che sono anche le radici dell'equazione in esame.}$$

$$d) \log_{(0,25^x)} (x^2 - x) = 1 \rightarrow \begin{cases} x^2 - x = \frac{1}{4}x \\ C.E. (x^2 - x > 0) \wedge (0,25^x > 0) \wedge (0,25^x \neq 1) \end{cases}$$

L'equazione ammette come radici $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{4}$, delle quali solo x_2 verifica le condizioni di esistenza e qui di l'equazione logaritmica ammette come soluzione solo x_2 .

$$e) \sqrt{1 - \frac{1}{x}} < \frac{1}{2} \text{ La disequazione è equivalente al sistema seguente}$$

¹ Esercizi assegnati nella prova di recupero nella classe 3I il 4-set-2010

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1}{x} \geq 0 \\ \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)^2 < \left(\frac{1}{2} \right)^2 \end{array} \right. , \text{ che diventa } \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-1}{x} \geq 0 \\ \frac{3x-4}{4x} < 0 \end{array} \right. .$$

La prima disequazione è soddisfatta nell'insieme $S_1 =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$; la seconda disequazione è soddisfatta nell'insieme $S_2 = \left] 0; \frac{4}{3} \right[$; l'insieme delle soluzioni del sistema è $S = S_1 \cap S_2 = \left[1; \frac{4}{3} \right[$.