Equazioni esponenziali

Risolvere le seguenti equazioni esponenziali [(1)]

1. $2^{3x-1}=2^{1-x}$	(L1)	$S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$
2. $4^{x+1}=8^{2x-3}$	(L1)	$S=\left\{\frac{11}{4}\right\}$
3. $3^{2x-5}=\frac{1}{27^x}$	(L1)	$S=\{1\}$
4. $25^{-\frac{1}{x}}=625$	(L1)	$S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
5. $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-1}=\frac{8}{27}$	(L2)	$S=\varnothing$
6. $2^{x^3-2x^2}=8^x$	(L2)	$S=\{-1;0;3\}$
7. $\sqrt{18}\cdot 4^{\frac{x}{2}}=12$	(L2)	$S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$
8. $\sqrt[3]{5^x}\cdot 125=25^{1-x}$	(L2)	$S=\left\{-\frac{3}{7}\right\}$
9. $\sqrt[x]{2\cdot\sqrt{2^{x+1}}}=\sqrt[16]{4^x}$	(L3)	$S=\{-2;6\}$
10. $\frac{\sqrt{3^x}\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[x]{3}}}{\sqrt[x]{27}\cdot\sqrt{9^{-x}}}=\sqrt[6x]{3^{x-8}}$	(L3)	$S=\left\{-1;\frac{8}{9}\right\}$
11. $1000^x-0{,}1\cdot 10^{2x^2}=10^{3x}-(0{,}01)^{x^2}$	(L2)	$S=\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\}$
12. $3^{2x}-5\cdot 3^x-6=0$	(L3)	$S=\{\log_3(6)\}$
13. $4^x-2^{x+1}-8=0$	(L3)	$S=\{2\}$
14. $6\cdot 3^x-9^x=-27$	(L3)	$S=\{2\}$
15. $100^x+1{,}9\cdot 10^x-0{,}2=0$	(L3)	$S=\{-1\}$

[(1)] L'annotazione (Li), con i=1,2,3,4,5, nella traccia indica il livello di difficoltà dell'esercizio su una scala da 1 a 5.

Elaborazioni

1. $2^{3x-1}=2^{1-x}$ La funzione esponenziale con base positiva diversa da 1 è iniettiva; quindi, l'uguaglianza in esame sussiste solo se sono uguali gli esponenti. $3x-1=1-x \to 4x=2 \to x=\frac{1}{2}$

2. $4^{x+1}=8^{2x-3}$ L'equazione si può ridurre all'uguaglianza di due potenze aventi come base 2; ciò fatto si uguaglieranno gli esponenti.

   $4^{x+1}=8^{2x-3} \to \left(2^2\right)^{x+1}=\left(2^3\right)^{2x-3} \to 2^{2x+2}=2^{6x-9} \to 2x+2=6x-9 \to 4x=11 \to x=\frac{11}{4}$

3. $3^{2x-5}=\frac{1}{27^x} \to 3^{2x-5}=27^{-x} \to 3^{2x-5}=3^{-3x} \to 2x-5=-3x \to 5x=5 \to x=1$

4. $25^{-\frac{1}{x}}=625 \to 25^{-\frac{1}{x}}=25^2 \to -\frac{1}{x}=2 \to x=-\frac{1}{2}$

5. $\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-1}=\frac{8}{27} \to \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^3 \to \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-1}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \to x^2-1=-3 \to x^2=-2$, $\nexists x \in R$

6. $2^{x^3-2x^2}=8^x \to 2^{x^3-2x^2}=2^{3x} \to x^3-2x^2=3x \to x\left(x^2-2x-3\right)=0 \to (x=0)\vee\left(x^2-2x-3=0\right) \to (x=0)\vee$ $\left(x=1\pm\sqrt{4}=1\pm 2\right) \to (x=0)\vee(x=-1)\vee(x=3)$

7. $\sqrt{18}\cdot 4^{\frac{x}{2}}=12 \to 3\sqrt{2}\cdot 2^{2\cdot\frac{x}{2}}=12 \to 2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^x=2^2 \to 2^{\frac{1}{2}+x}=2^2 \to \frac{1}{2}+x=2 \to x=\frac{3}{2}$

8. $\sqrt[3]{5^x}\cdot 125=25^{1-x} \to 5^{\frac{x}{3}}\cdot 5^3=\left(5^2\right)^{1-x} \to 5^{\frac{x}{3}+3}=5^{2-2x} \to \frac{x}{3}+3=2-2x \to 7x=-3 \to x=-\frac{3}{7}$

9. $\sqrt[x]{2\cdot\sqrt{2^{x+1}}}=\sqrt[16]{4^x} \to \left(2\cdot 2^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=4^{\frac{x}{16}} \to \left(2^{1+\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{1}{x}}=2^{2\cdot\frac{x}{16}} \to 2^{\frac{x+3}{2}\cdot\frac{1}{x}}=2^{\frac{x}{8}} \to \frac{x+3}{2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{8} \to 4x+12=x^2 \to$ $x^2-4x-12=0 \to x=2\pm 4 \to \left(x_1=-2\right)\vee\left(x_2=6\right)$.

10. $\frac{\sqrt{3^x}\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[x]{3}}}{\sqrt[x]{27}\cdot\sqrt{9^{-x}}}=\sqrt[6x]{3^{x-8}} \to \frac{3^{\frac{x}{2}}\cdot\left(3\cdot 3^{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{x}}\cdot 9^{-\frac{x}{2}}}=3^{\frac{x-8}{6x}} \to \frac{3^{\frac{x}{2}}\cdot 3^{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{3}}}{3^{\frac{3}{x}}\cdot 3^{-2\cdot\frac{x}{2}}}=3^{\frac{x-8}{6x}} \to 3^{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3x}}\cdot 3^{-\frac{3}{x}}\cdot 3^x=3^{\frac{x-8}{6x}} \to$ $3^{\frac{x}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3x}-\frac{3}{x}+x}=3^{\frac{x-8}{6x}} \to 3^{\frac{3x^2+2x+2-18+6x^2}{6x}}=3^{\frac{x-8}{6x}} \to \frac{9x^2+2x-16}{6x}=\frac{x-8}{6x} \to 9x^2+2x-16=x-8 \to$ $9x^2+x-8=0 \to x_1=-1; x_2=\frac{8}{9}$

11. $3^{2x}-5\cdot 3^x-6=0 \to \left(3^x\right)^2-5\cdot 3^x-6=0 \to$, utilizzando l'incognita ausiliaria t=3^x, si ha l'equazione $t^2-5t-6=0 \to t=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{2}=\frac{5\pm 7}{2}$. Si hanno le due radici, $t_1=-1$, $t_2=6$.

    Osservato che t=3^x>0 $\forall x\in$R deduciamo che l'equazione ottenuta da $t_1=-1$, cioè $3^x=-1$, non ammette soluzioni, mentre l'equazione $3^x=6$ ammette come soluzione $x=\log_3(6)$.

12. $4^x-2^{x+1}-8=0 \to \left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x-8=0$. Con 2^x=t>0 si passa all'equazione ausiliaria $t^2-2t-8=0$ che ammette come radici $t_1=-2$, $t_2=4$; il primo valore si scarta, mentre il secondo conduce all'equazione esponenziale $2^x=4$ che ammette come soluzione *x*=2.

13. $6\cdot 3^x - 9^x = -27 \to 6\cdot 3^x - \left(3^x\right)^2 = -27 \to \left(3^x\right)^2 - 6\cdot 3^x - 27 = 0$. Con $3^x = t > 0$ si ha l'equazione ausiliaria $t^2 - 6t - 27 = 0$ che ammette come radici $t = 3 \pm \sqrt{9+27} = 3 \pm 6$ $\to$$t_1$=-3, t_2=9. Riconosciamo che solo dalla seconda radice si ottiene un'equazione che ammette una radice reale; precisamente $3^x = 9 \to x = 2$.
14. $1000^x - 0{,}1\cdot 10^{2x^2} = 10^{3x} - \left(0{,}01\right)^{x^2} \to \cancel{10^{3x}} - 10^{-1}\cdot 10^{2x^2} = \cancel{10^{3x}} - \left(10^{-2}\right)^{x^2} \to 10^{-1+2x^2} = 10^{-2x^2} \to$ $-1 + 2x^2 = -2x^2 \to 4x^2 = 1 \to x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$.
15. $100^x + 1{,}9\cdot 10^x - 0{,}2 = 0 \to 10^{2x} + \frac{19}{10}\cdot 10^x - \frac{2}{10} = 0 \to 10\cdot 10^{2x} + 19\cdot 10^x - 2 = 0 \to 10\cdot\left(10^x\right)^2 + 19\cdot 10^x - 2 = 0$.

    Con $10^x = t \to 10t^2 + 19t - 2 = 0 \to t = \frac{-19 \pm \sqrt{361+80}}{20} = \frac{-19 \pm 21}{20} \to t_1 = -2,\ t_2 = \frac{1}{10}$.

    Dal valore $t_1 = -2$ si ottiene l'equazione esponenziale $10^x = -2$ che non ha soluzione;

    dal valore $t_2 = \frac{1}{10}$ si ottiene l'equazione $10^x = \frac{1}{10} \to 10^x = 10^{-1} \to x = -1$.