Equazioni logaritmiche

Risolvere le seguenti equazioni

1. $\left(\log_3(x-1)\right)^2 = 2+2\log_9(x-1)$ $\qquad S=\left\{\frac{4}{3};10\right\}$
2. $\left(\log_2\left(4x^2\right)\right)^2 - 8\log_2(x) - 8 = 0$ $\qquad S=\left\{\frac{1}{4};4\right\}$
3. $\log_5(2x+1)+8\cdot\log_{25}(2x+1)=\log_5 3125$ $\qquad S=\{2\}$
4. $\left(\log_x\left(x^2-x\right)\right)^2 - \log_x\left(x^2-x\right)=0$ $\qquad S=\left\{2;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Elaborazioni

1. $\left(\log_3(x-1)\right)^2 = 2+2\log_9(x-1)$

Osserviamo che l'equazione in esame esiste sotto la C.d.E. (condizione di esistenza): x-1>0, quindi per x >1. Per risolvere l'equazione è opportuno ridurre le funzioni logaritmiche alla stessa base; le riduciamo alla base 3.

Per la proprietà del cambiamento di base si ha:

$$\log_9(x-1)=\frac{\log_3(x-1)}{\log_3 9}=\frac{\log_3(x-1)}{\log_3 3^2}=\frac{\log_3(x-1)}{2\cdot\log_3 3}=\frac{\log_3(x-1)}{2\cdot 1}=\frac{\log_3(x-1)}{2}.$$

L'equazione in esame diventa $\left(\log_3(x-1)\right)^2 = 2+2\cdot\frac{\log_3(x-1)}{2} \rightarrow \left(\log_3(x-1)\right)^2-\log_3(x-1)-2=0$,

Introduciamo un'incognita ausiliaria ponendo $\log_3(x-1)=t$. L'equazione diventa $t^2-t-2=0$, le cui radici sono

$t=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\rightarrow t_1=-1,\ t_2=2$, Ritornando all'incognita x si ha:

$$t_1=-1\rightarrow\log_3(x-1)=-1\rightarrow x-1=\frac{1}{3}\rightarrow x_1=\frac{4}{3};\quad t_2=2\rightarrow\log_3(x-1)=2\rightarrow x-1=9\rightarrow x_2=10.$$

Poiché entrambi i valori trovati soddisfano la C.d.E. sono accettabili come soluzioni dell'equazione.

Conclusione - L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\left\{\frac{4}{3};10\right\}$.

2. $\left(\log_2\left(4x^2\right)\right)^2 - 8\log_2(x) - 8 = 0$

L'equazione in esame esiste sotto la C.d.E. (condizione di esistenza): x>0. Nel rispetto di detta condizione, applicando le proprietà del prodotto e della potenza della funzione logaritmica elaboriamo a parte il primo termine dell'equazione, successivamente procederemo con la risoluzione dell'equazione.

$$\left(\log_2\left(4x^2\right)\right)^2=\left(\log_2(4)+\log_2\left(x^2\right)\right)^2=\left(\log_2\left(2^2\right)+2\log_2(x)\right)^2=\left(2+2\log_2(x)\right)^2=4+8\log_2(x)+4\left(\log_2(x)\right)^2.$$

Affrontiamo l'equazione nel suo complesso.

$$\left(\log_2\left(4x^2\right)\right)^2-8\log_2(x)-8=0\rightarrow 4+8\log_2(x)+4\left(\log_2(x)\right)^2-8\log_2(x)-8=0\rightarrow\left(\log_2(x)\right)^2=4\rightarrow$$
$$\log_2(x)=\pm2\rightarrow x_1=2^{-2}=\frac{1}{4};\ x_2=4.$$

I valori ottenuti soddisfano la C.d.E. perciò si accettano. L'insieme delle soluzioni dell'equazione è:
$S=\left\{\frac{1}{4};4\right\}$.

3. $\log_5(2x+1)+8\cdot\log_{25}(2x+1)=\log_5 3125$

L'equazione esiste sotto la C.d.E.: $2x+1>0$, quindi $x>-1/2$. Elaboriamo l'equazione.

$$\log_5(2x+1)+8\cdot\frac{\log_5(2x+1)}{\log_5 5^2}=\log_5 5^5\rightarrow\log_5(2x+1)+8\cdot\frac{\log_5(2x+1)}{2\log_5 5}=5\log_5 5\rightarrow$$
$\log_5(2x+1)+4\cdot\log_5(2x+1)=5\rightarrow\log_5(2x+1)=1\rightarrow 2x+1=5\rightarrow x=2$. Il valore soddisfa la C.d.E., quindi è accettabile. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni è $S=\{2\}$.

4. $\left(\log_x\left(x^2-x\right)\right)^2-\log_x\left(x^2-x\right)=0$

Le condizioni di esistenza per l'equazione sono $\left(x^2-x>0\right)\wedge\left((x>0)\wedge(x\neq1)\right)$; la prima è relativa all'argomento delle funzione logaritmo, la seconda è relativa alla base della stessa funzione. Sviluppate le due condizioni **si conclude che deve risultare (x>1)**. Ciò premesso elaboriamo l'equazione.

$$\left(\log_x\left(x^2-x\right)\right)^2-\log_x\left(x^2-x\right)=0\rightarrow\log_x\left(x^2-x\right)\cdot\left(\log_x\left(x^2-x\right)-1\right)=0\rightarrow\left(\log_x\left(x^2-x\right)=0\right)\vee\left(\log_x\left(x^2-x\right)-1=0\right)$$

Risolviamo separatamente le due equazioni.

$\log_x\left(x^2-x\right)=0\rightarrow x^2-x=x^0\rightarrow x^2-x-1=0\rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Le due radici sono: $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}<0$, che va scartata; $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>1$, che si accetta.

$\log_x\left(x^2-x\right)-1=0\rightarrow\log_x\left(x^2-x\right)=1\rightarrow x^2-x=x\rightarrow x(x-2)=0$, che ammette come radici x=0, x =2. Si accetta solo x =2.

Conclusione - L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\left\{2;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.