

Esercitazione sulle disequazioni logaritmiche

- | | |
|--|---|
| 1. $\log_{10}(3-2x) \leq 1$ | $R: -\frac{7}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ |
| 2. $\log_{\frac{1}{2}}(7x+1) \leq 3$ | $R: -\frac{1}{7} < x < -\frac{7}{56}$ |
| 3. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < 0$ | $R: (x < -\sqrt{2}) \vee (x > \sqrt{2})$ |
| 4. $\log_{\frac{5}{4}}(3x-2) < -1$ | $R: \frac{2}{3} < x < \frac{14}{15}$ |
| 5. $\log_{\frac{1}{3}}(3x^2+8x) \geq -2$ | $R: \left[-\frac{4+\sqrt{43}}{3}; -\frac{8}{3}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{43}-4}{3}\right]$ |
| 6. $\log_2(4x-8) - 2\log_2(5-x) \geq 0$ | $R: 3 \leq x < 5$ |
| 7. $\frac{\ln(x)}{2-\ln(x)} > 0$ | $R:]1; e^2[$ |

Risoluzione

- $\log_{10}(3-2x) \leq 1$, la disequazione è equivalente alla doppia disuguaglianza $0 < 3-2x \leq 10$, quindi al sistema $\begin{cases} 3-2x > 0 \\ 3-2x \leq 10 \end{cases}$, che diventa $\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{7}{2} \end{cases}$. Dunque l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = \left[-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right]$.
- $\log_{\frac{1}{2}}(7x+1) \leq 3$, la disequazione è equivalente al sistema di disequazioni $\begin{cases} 7x+1 > 0 \\ 7x+1 < \left(\frac{1}{2}\right)^3 \end{cases}$, che diventa $\begin{cases} x > -\frac{1}{7} \\ x < -\frac{7}{56} \end{cases}$. Pertanto l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = \left]-\frac{1}{7}; -\frac{7}{56}\right]$.
- $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1) < 0$, la disequazione è equivalente alla seguente $x^2-1 > \left(\frac{1}{2}\right)^0$, che diventa $x^2-2 > 0$, soddisfatta per $(x < -\sqrt{2}) \vee (x > \sqrt{2})$. L'insieme delle soluzioni della disequazione è $S =]-\infty; -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}; +\infty[$.
- $\log_{\frac{5}{4}}(3x-2) < -1$ La disequazione è equivalente alla doppia disuguaglianza $0 < 3x-2 < \left(\frac{5}{4}\right)^{-1}$, dunque al sistema di disequazioni $\begin{cases} 3x-2 > 0 \\ 3x-2 < \frac{4}{5} \end{cases}$. La prima disequazione è soddisfatta per $x > \frac{2}{3}$ e la seconda per $x < \frac{14}{15}$. In definitiva il sistema è soddisfatto per i valori reali $\frac{2}{3} < x < \frac{14}{15}$.

5. $\log_{\frac{1}{3}}(3x^2 + 8x) \geq -2$ La disequazione è equivalente alla doppia disuguaglianza $0 < 3x^2 + 8x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

, quindi al sistema $\begin{cases} 3x^2 + 8x > 0 \\ 3x^2 + 8x \leq 3^2 \end{cases}$, che diventa $\begin{cases} 3x^2 + 8x > 0 \\ 3x^2 + 8x - 9 \leq 0 \end{cases}$. La prima disequazione è soddisfatta

per i valori reali $\left(x < -\frac{8}{3}\right) \vee (x > 0)$; la seconda disequazione è soddisfatta per i valori reali

$-\frac{4+\sqrt{43}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{43}-4}{3}$. Intersecando i due insiemi numerici suddetti si trova l'insieme delle

soluzioni $S = \left[-\frac{4+\sqrt{43}}{3}; -\frac{8}{3}\right] \cup \left[0; \frac{\sqrt{43}-4}{3}\right]$.

6. $\log_2(4x-8) - 2\log_2(5-x) \geq 0$ Le condizioni di esistenza (C.d.E.) del primo membro sono

C.d.E.: $(4x-8 > 0) \wedge (5-x > 0)$, quindi deve risultare $2 < x < 5$. In questo dominio la disequazione in esame si trasforma come segue

$\log_2(4x-8) \geq 2\log_2(5-x) \rightarrow \log_2(4x-8) \geq \log_2(5-x)^2$ e poiché la funzione logaritmica di base 2 è strettamente crescente la disequazione ottenuta è equivalente alla disequazione $4x-8 \geq (5-x)^2$.

Elaborando quest'ultima si ricava la disequazione $x^2 - 14x + 33 \leq 0$.

L'equazione associata a questa disequazione è

$x^2 - 14x + 33 = 0$ le cui radici sono $x_1 = 3$, $x_2 = 11$, quindi la disequazione è soddisfatta per $3 \leq x \leq 11$.

Tenendo conto delle C.d.E. concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è l'intervallo $3 \leq x < 5$.

7. $\frac{\ln(x)}{2-\ln(x)} > 0$ Il primo membro della disequazione è definito

per i valori reali x che soddisfano le C.d.E. $(x > 0 \wedge x \neq e^2)$. Nel dominio di definizione della disequazione, il numeratore della frazione è positivo per $x > 1$, il denominatore è positivo per $0 < x < e^2$. Confrontando i segni del numeratore e del denominatore nel dominio di definizione si deduce che la frazione assume valore positivo nell'intervallo $]1; e^2[$ e detto intervallo è l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame. In Figura 1 è rappresentato parzialmente il diagramma

della funzione $f(x) = \frac{\ln(x)}{2-\ln(x)}$. Nei punti dell'intervallo $]1; e^2[$

risulta $f(x) > 0$ e il grafico della funzione si trova al di sopra dell'asse delle ascisse.

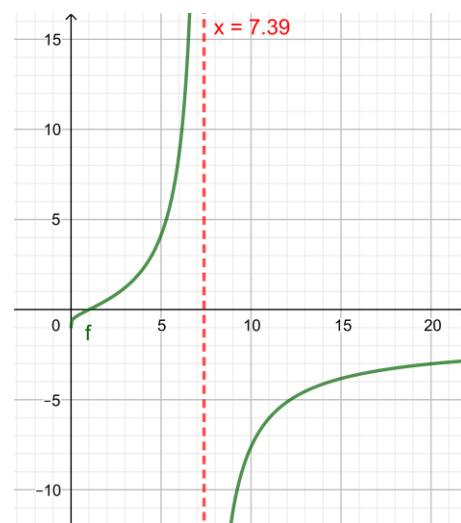


Figura 1