Sugli spazi vettoriali

Quesito

Considerato uno spazio vettoriale V su un campo K di scalari, sapendo che V_1, V_2, V_3 sono tre vettori non nulli dello spazio V che verificano l'equazione $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$, con $(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3)$ terna di scalari diversa dalla terna nulla $(0;0;0)$, stabilire se si può affermare che il vettore V_1 appartiene allo span(V_2, V_3).

Risoluzione

Affermiamo subito che **in generale non si può affermare che il vettore V_1 appartenga allo span(V_2, V_3)**. Dimostriamo l'affermazione.

1. La validità della relazione $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$, con la condizione con $(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3) \neq (0;0;0)$, indica che **i tre vettori V_1, V_2, V_3 sono linearmente dipendenti**.
2. Affermare che V_1 appartiene allo span(V_2, V_3) per definizione significa che V_1 è esprimibile come combinazione lineare dei vettori V_2, V_3, quindi che esistono due scalari *a* e *b* tali che si abbia $V_1 = aV_2 + bV_3$. Ebbene, dalla lineare dipendenza dei tre vettori si deduce che sussiste l'uguaglianza $\lambda_1 V_1 = -\lambda_2 V_2 - \lambda_3 V_3$, ma in essa non si è certi che sia $\lambda_1 \neq 0$ in modo da poter scrivere la conseguente uguaglianza $V_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} V_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} V$, che permetterebbe di affermare che V_1 è combinazione lineare di V_2, V_3 e quindi che sia un vettore dello span(V_2, V_3).
3. Osserviamo che **relativamente ai vettori V_2, V_3**, si verifica uno solo dei due casi a) e b) descritti di seguito.
   a) I vettori **sono linearmente indipendenti** (l.i.). In questo caso sappiamo che $\lambda V_2 + \mu V_3 = 0$ se e solo $(\lambda;\mu) = (0;0)$. Ora, dalla relazione $\lambda_1 V_1 = -\lambda_2 V_2 - \lambda_3 V_3$, se fosse λ_1=0 sarebbe anche $\lambda_1 V_1 = 0$ per ogni vettore V_1 , quindi si avrebbe anche $-\lambda_2 V_2 - \lambda_3 V_3, = 0$ e ciò implica, per la lineare indipendenza di V_2, V_3, che $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, quindi nella relazione $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$ si avrebbe $(\lambda_1;\lambda_2;\lambda_3) = (0;0;0)$, contro l'ipotesi. Perciò, se V_2, V_3 sono l. i. risulta certamente $\lambda_1 \neq 0$ e si può scrivere $V_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} V_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} V$, quindi V_1 è esprimibile come combinazione lineare di V_2, V_3 e in definitiva appartiene allo span(V_2, V_3).
   b) I vettori V_2, V_3 **sono linearmente dipendenti**. In questo caso esiste una coppia di scalari (*a*';*b*')≠ (0;0) verificante l'uguaglianza $a'V_2 + b'V_3 = 0$; più in particolare **esiste** senz'altro **uno scalare h≠0** tale che si abbia **V_3=hV_2**; i vettori V_2 ,V_3 sono proporzionali. In questo caso lo span(V_2, V_3) è uno spazio vettoriale di dimensione uno. La supposta relazione $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$ diventa $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + hV_2 = 0$, che assume la forma equivalente $\lambda_1 V_1 = -(\lambda_2 + h)V_2$. Ebbene, quest'uguaglianza, con λ_2=-h, sussiste per ogni vettore V_1 dello spazio V purché sia λ_1=0, quindi non necessariamente V_1 deve essere della forma h'V_2 , ossia non necessariamente V_1 deve appartenere allo span(V_2, V_3), . In conclusione, se V_2, V_3 sono linearmente dipendenti, pur sussistendo la relazione $\lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \lambda_3 V_3 = 0$, non necessariamente V_1 sarà un elemento dello span(V_2, V_3). C.V.D.