Algebra lineare

[1]Esercizio 1

Al variare del parametro *a*, si determinino le matrici X 2x2 ad elementi reali tali che AX=B , dove $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & a\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

Elaborazioni

Sia $X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}$ la matrice ad elementi reali da determinare. Osserviamo che secondo il prodotto righe per colonne risulta

$AX=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & a\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ 2x_{11}+ax_{21} & 2x_{12}+ax_{22}\end{bmatrix}$, per cui l'uguaglianza che deve essere soddisfatta $AX=B$ diventa

$$\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ 2x_{11}+ax_{21} & 2x_{12}+ax_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Le incognite x_{ij} devono soddisfare il seguente sistema lineare

$$\begin{cases}x_{11}=0\\ x_{12}=1\\ 2x_{11}+ax_{21}=1\\ 2x_{12}+ax_{22}=0\end{cases}.$$

Dalle prime due condizioni si deduce che la terza equazione può ammettere soluzione solo se $a\neq 0$ e risulta $x_{21}=\frac{1}{a}$; con la stessa condizione dalla quarta equazione si ricava che deve essere $x_{22}=0$. Dunque, se $a\neq 0$ la soluzione del sistema è $x_{11}=0$, $x_{12}=1$, $x_{21}=\frac{1}{a}$, $x_{22}=0$, perciò esiste una ed una sola matrice X che verifica l'equazione AX=B ed è $X=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{a} & 0\end{bmatrix}$. Per ogni altro valore del parametro *a* il sistema non ammette soluzione e quindi non esiste alcuna matrice 2x2 ad elementi reali che verifichi l'equazione AX=B.

*** ***

[1] Esercizio assegnato nella Seconda Prova Intermedia del 13-giugno-2014

Esercizio 2

Al variare del parametro reale k, si determinino le matrici 2x2 ad elementi reali, X, tali che AX=0 , dove A è $\begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{bmatrix}$.

Elaborazioni

Poniamo per brevità $X=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, la matrice incognita da determinare. Utilizzando il prodotto righe per colonne tra matrici, essendo

$AX=\begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x+kz & y+kw \\ kx+4z & ky+4w \end{bmatrix}$, si deve verificare l' uguaglianza

$\begin{bmatrix} x+kz & y+kw \\ kx+4z & ky+4w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, dunque la quaterna (x, y, z, w) deve essere soluzione del sistema lineare omogeneo di equazioni

$\begin{cases} x+kz=0 \\ y+kw=0 \\ kx+4z=0 \\ ky+4w=0 \end{cases}$ del quale la matrice dei coefficienti delle incognite è $M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ k & 0 & 4 & 0 \\ 0 & k & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Ricordiamo che un sistema omogeneo lineare di equazioni ammette senz'altro la soluzione banale (x==,y=0,z=0,w=0) e che ammette soluzioni diverse se e solo se il rango della matrice dei coefficienti delle incognite è minore del numero delle incognite presenti nel sistema; precisamente, se il sistema contiene n incognite ed r è il rango della suddetta matrice, allora il numero delle soluzioni non banali è ∞^{n-r} .Occorre pertanto studiare come varia il rango del sistema al variare del parametro reale k. A tale scopo calcoliamo il determinate della matrice M. Risulta:

$\det(M)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k \\ k & 0 & 4 & 0 \\ 0 & k & 0 & 4 \end{vmatrix}$. Sviluppando con la regola di Laplace applicata alla prima colonna otteniamo

$$\det(M)=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 4 & 0 \\ k & 0 & 4 \end{vmatrix}+k\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ 1 & 0 & k \\ k & 0 & 4 \end{vmatrix}=\ldots=(k^2-4)(k-4)$$

Il determinante si annulla per k=2 $\vee$ k=-2 $\vee$ k=4.

Sussistono i seguenti casi

1. Con $(k \neq \pm 2) \wedge (k \neq 4)$ il sistema ammette solo la soluzione banale x=0, y=0, z=0, w=0, quindi l'unica matrice soluzione è $X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2. Con k=2 si ha la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, della quale sappiamo che il determinante associato è nullo, quindi certamente ha rango r<4. Poiché il minore del secondo ordine estratto incrociando le prime due righe con le prime due colonne è diverso da zero: $M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$, deduciamo che il rango sarà r≥2. A questo punto notiamo che la prima e la terza riga della matrice sono proporzionali ($r_3=2r_1$) , come pure sono proporzionali la seconda e la quarta riga ($r_4=2r_2$), nonché sono proporzionali le colonne prima e terza ($c_3=2c_1$) e seconda e quarta ($c_4=2c_2$), quindi orlando comunque il minore M_1 con le righe e le colonne comunque prese i minori estratti del terzo ordine contengono sempre almeno due linee parallele proporzionali, dunque il loro valore è zero. Applicando il teorema di Kronecker si conclude che il rango della matrice in oggetto è r=2 e pertanto il sistema di equazioni ammette $\infty^{4-2}=\infty^2$ soluzioni. Le soluzioni si possono ottenere utilizzando le prime due equazioni ponendo nelle quali z=α, w=β, giacché i coefficienti di z e w non compaiono nel minore estratto M_1 e risolvendo il corrispondente sistema. Determiniamo le soluzioni:

$$\begin{cases} x+2z=0 \\ y+2w=0 \\ z=\alpha \\ w=\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2\alpha \\ y=-2\beta \\ z=\alpha \\ w=\beta \end{cases}$$

, con α,β∈R. Le matrici soluzioni sono $X = \begin{bmatrix} -2\alpha & -2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$.

3. Con k=-2 si ha la matrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Si riconosce agevolmente che anche questa matrice ha rango r=2, e ciò ancora per la proporzionalità delle righe prima e terza ($r_3=-2r_1$) , delle righe seconda ($r_4=-2r_2$), delle colonne prima e terza ($c_3=-2c_1$) e seconda e quarta ($c_4=-2c_2$), mentre il minore del secondo ordine estratto dalle prime due righe e prime due colonne coincide con quello considerato nel caso precedente, quindi è diverso da zero. Anche per k=-2 il sistema ammette ∞^2 soluzioni che sono le quaterne

$$\begin{cases} x=2\alpha \\ y=2\beta \\ z=\alpha \\ w=\beta \end{cases}$$

e quindi le matrici X soluzioni sono $X = \begin{bmatrix} 2\alpha & 2\beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$, con α,β∈R.

4. Con k=4 si ha la matrice $M=\begin{bmatrix}1&0&4&0\\0&1&0&4\\4&0&4&0\\0&4&0&4\end{bmatrix}$.

   Sappiamo già che la matrice ha determinante nullo; osserviamo che il minore estratto incrociando le prime tre righe con le prime tre colonne è diverso da zero:

   $$M'=\begin{vmatrix}1&0&4\\0&1&0\\4&0&4\end{vmatrix}=(4+0+0)-(16+0+0)=-12$$

   quindi la matrice ha rango r=3 ed il sistema ammette ∞^1 soluzioni che si possono ottenere operando con le prime tre equazioni nelle quali si pone w=α:

   $$\begin{cases}x+4z=0\\y+4w=0\\4x+4z=0\\4y+4w=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x+4z=0\\y+4\alpha=0\\x+z=0\\w=\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=0\\y=-4\alpha\\z=0\\w=\alpha\end{cases}$$ Le matrici X soluzioni sono $X=\begin{bmatrix}0&-4\alpha\\0&\alpha\end{bmatrix}$.