Esercizi sulle equazioni monomie, binomie o ad esse riconducibili

Risolvere le seguenti equazioni nel campo reale

1) $4x^3+\frac{1}{2}=0$	$S_R=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
2) $1-x^4=0$	$S_R=\{-1;1\}$
3) $9x^5-\frac{1}{27}=0$	$S_R=\left\{\frac{1}{3}\right\}$
4) $2x^6-\frac{9}{8}=0$	$S_R=\left\{-\sqrt[3]{\frac{3}{4}};\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right\}$
5) $x^8-16=0$	$S_R=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$
6) $x^3-2x=0$	$S_R=\{0;\pm\sqrt{2}\}$
7) $2x^4-\frac{25}{2}x^2=0$	$S_R=\left\{0;0;\pm\frac{5}{2}\right\}$
8) $\frac{5}{2}x^3-\frac{18}{5}x=0$	$S_R=\left\{0;\pm\frac{6}{5}\right\}$
9) $x^5+\frac{0,01x^3}{0,25}=0$	$S_R=\{0;0;0\}$
10) $x^4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=0$	$S_R=\{0;0;0\}$
11) $x^2\left(x^3-\frac{8}{27}\right)=0$	$S_R=\left\{0;0;\frac{2}{3}\right\}$
12) $\frac{1}{5}x-125x^5=0$	$S_R=\left\{0;-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right\}$
13) $\left(x^2+3x\right)^2=0$	$S_R=\{0;0;-3;-3\}$
14) $\left(x^2-x\right)^3=0$	$S_R=\{0;0;0;1;1;1\}$
15) $\frac{2}{5}x^2-\frac{5}{8}x^6=0$	$S_R=\left\{0;0;\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$
16) $4x^6+9x^2=0$	$S_R=\{0;0\}$
17) $x^4+6x^3+9x^2=0$	$S_R=\{0;0;-3;-3\}$
18) $x-x^5=0$	$S_R=\{0;\pm1\}$
19) $x^4-x^2=0$	$S_R=\{0;0;\pm1\}$
20) $x^5-25x=0$	$S_R=\{0;\pm\sqrt{5}\}$
21) $x^6+8x^3=0$	$S_R=\{0;0;0;-2\}$
22) $x^2(2x+1)^3=0$	$S_R=\left\{0;0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$
23) $x^7+2x^5+4x^3=0$	$S_R=\{0;0;0\}$

Risoluzioni

1) $4x^3+\frac{1}{2}=0$ L'equazione è binomia di terzo grado e ammette una sola radice reale. Il valore della radice si ottiene come segue

$$4x^3+\frac{1}{2}=0\rightarrow x^3=-\frac{1}{8}\rightarrow x=\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=-\frac{1}{2} \qquad S_R=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

2) $1-x^4=0\rightarrow x^4=1\rightarrow x=\pm\sqrt[4]{1}=\pm 1 \qquad S_R=\{-1;1\}$

3) $9x^5-\frac{1}{27}=0\rightarrow x^5=\frac{1}{3^2\cdot 3^3}\rightarrow x=\sqrt[5]{\left(\frac{1}{3}\right)^5}=\frac{1}{3} \qquad S_R=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

4) $2x^6-\frac{9}{8}=0\rightarrow x^6=\frac{9}{16}\rightarrow x=\pm\sqrt[6]{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\pm\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \qquad S_R=\left\{-\sqrt[3]{\frac{3}{4}};\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right\}$

5) $x^8-16=0\rightarrow x^8=16\rightarrow x=\pm\sqrt[8]{16}=\pm\sqrt[8]{2^4}=\pm\sqrt{2} \qquad S_R=\{-\sqrt{2};\sqrt{2}\}$

6) $x^3-2x=0\rightarrow x\left(x^2-2\right)=0\rightarrow (x=0)\vee\left(x^2-2=0\right)\rightarrow (x=0)\vee\left(x=\pm\sqrt{2}\right)\rightarrow \qquad S_R=\{0;\pm\sqrt{2}\}$

7) $2x^4-\frac{25}{2}x^2=0\rightarrow 2x^2\left(x^2-\frac{25}{4}\right)=0\rightarrow \left(x^2=0\right)\vee\left(x^2-\frac{25}{4}=0\right)\rightarrow \left(x_1=x_2=0\right)\vee\left(x=\pm\frac{5}{2}\right)$

L'equazione ammette solo quattro radici reali, due delle quali coincidono con 0 (zero). Si dice che x=0 è radice doppia o che ha molteplicità 2. $S_R=\left\{0;0;\pm\frac{5}{2}\right\}$

8) $\frac{5}{2}x^3-\frac{18}{5}x=0\rightarrow \frac{5}{2}x\left(x^2-\frac{36}{25}\right)=0\rightarrow (x=0)\vee\left(x^2=\frac{36}{25}\right)\rightarrow (x=0)\vee\left(x=\pm\frac{6}{5}\right)$ L'equazione ammette solo tre radici reali tutte distinte. $S_R=\left\{0;\pm\frac{6}{5}\right\}$

9) $x^5+\frac{0,01x^3}{0,25}=0\rightarrow x^3\left(x^2+\frac{0,01}{0,25}\right)=0\rightarrow \left(x^3=0\right)\vee\left(x^2+\frac{1}{25}=0\right)\rightarrow$ l'equazione monomia $x^3=0$ ammette la radice x=0 che ha molteplicità 3, mentre l'altra equazione non ha radici reali. L'insieme delle soluzioni nel campo reale è $S_R=\{0;0;0\}$.

10) $x^4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=0\rightarrow \left(x^4=0\right)\vee\left(x^2+\frac{1}{4}=0\right)\rightarrow \left(x_1=x_2=x_3=x_4=0\right)$

L'equazione monomia $x^4=0$ ammette la radice x=4 con molteplicità 4 e non vi sono altre radici reali. L'insieme delle soluzioni nel campo reale è $S_R=\{0;0;0;0\}$.

11) $x^2\left(x^3-\frac{8}{27}\right)=0\rightarrow \left(x^2=0\right)\vee\left(x^3=\frac{8}{27}\right)\rightarrow$ L'equazione monomia $x^2=0$ ammette la radice x=0 doppia e l'equazione binomia ammette l'unica radice reale $x=\frac{2}{3}$. $S_R=\left\{0;0;\frac{2}{3}\right\}$

12) $\frac{1}{5}x-125x^5=0 \to \frac{1}{5}x\left(1-5^4x^4\right)=0 \to \left(x=0\right)\vee\left(1-5^4x^4=0\right)$. La prima radice reale è x=0, da contare una volta (radice semplice);dalla seconda equazione si otterranno altre due radici reali. Proseguiamo.

$$\left(1-5^4x^4=0\right)\to\left(1-5^2x^2\right)\left(1+5^2x^2\right)=0\to\left(x^2=\frac{1}{25}\right)\vee\left(x^2=-\frac{1}{25}\right)$$

Dalla prima equazione si ricava $x=\pm\frac{1}{5}$; la seconda equazione non ha radici reali.

L'insieme delle radici nel campo reale è $S_R=\left\{0;-\frac{1}{5};\frac{1}{5}\right\}$.

13) $\left(x^2+3x\right)^2=0\to x^2\left(x+3\right)^2=0\to\left(x^2=0\right)\vee\left(\left(x+3\right)^2=0\right)$

Dalla prima equazione si ricava la soluzione doppia x=0. Per quanto concerne la seconda equazione osserviamo che ponendo x+3=y si riduce all'equazione monomia $y^2=0$ che ammette la radice y=0 con molteplicità 2; pertanto, tornando all'incognita x, poiché y=0 equivale a scrivere x=-3, si deduce che il valore x=-3 è radice con molteplicità 2. L'insieme delle soluzioni è: $S_R=\left\{0;0;-3;-3\right\}$.

14) $\left(x^2-x\right)^3=0\to x^3\left(x-1\right)^3=0\to\left(x^3=0\right)\vee\left(\left(x-1\right)^3=0\right)$ La prima equazione fornisce la soluzione x=0 da contare tre volte, la seconda x=1 da contare ancora tre volte.

S_R ={0,tre volte;1, tre volte}.

15) $\frac{2}{5}x^2-\frac{5}{8}x^6=0\to x^2\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{8}x^4\right)=0\to\left(x^2=0\right)\vee\left(\frac{2}{5}\left(1-\frac{25}{16}x^4\right)=0\right)$, dalla prima equazione si ricava la soluzione doppia x=0; dalla seconda equazione si ha

$\left(1-\frac{5}{4}x^2\right)\left(1+\frac{5}{4}x^2\right)=0$. Dal primo fattore uguagliato a zero si ottiene $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$; il secondo fattore per ogni x reale è positivo, quindi non fornisce altre equazioni. Concludiamo che l'insieme delle radici nel campo reale è $S_R=\left\{0;0;\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$.

16) $4x^6+9x^2=0\to x^2\left(4x^4+9\right)=0\to\left(x^2=0\right)\vee\left(4x^4+9=0\right)$ Nel campo reale il primo fattore fornisce la radice doppia x=0, mentre il secondo non si annulla per alcun valore. Concludiamo che l'insieme delle radici è $S_R=\left\{0;0\right\}$

Le equazioni proposte dal n.17 al n.23 sono lasciate come esercizi per il lettore.