Esercizi sulle equazioni monomie, binomie o ad esse riconducibili

Risolvere le seguenti equazioni nel campo complesso

1) $4x^3+\frac{1}{2}=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{1}{2};1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\right\}$

2) $1-x^4=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\{-1;1;-i;i\}$

3) $9x^5-\frac{1}{27}=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{x \mid x=\frac{1}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{2k\pi}{5}}, k=0,1,2,3,4\right\}$

4) $2x^6-\frac{9}{8}=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{\sqrt[3]{\frac{3}{4}};\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(-1\pm i\sqrt{3}\right);-\sqrt[3]{\frac{3}{4}};\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(1\pm i\sqrt{3}\right)\right\}$

5) $x^8-16=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{\pm\sqrt{2};\pm i\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{6}}{2};\frac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{6}}{2}\right\}$

6) $x^3-2x=0$ $\qquad S_R=\left\{0;\pm\sqrt{2}\right\}$

7) $2x^4-\frac{25}{2}x^2=0$ $\qquad S_R=\left\{0;0;\pm\frac{5}{2}\right\}$

8) $\frac{5}{2}x^3-\frac{18}{5}x=0$ $\qquad S_R=\left\{0;\pm\frac{6}{5}\right\}$

9) $x^5+\frac{0,01x^3}{0,25}=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;0;\pm\frac{1}{5}i\right\}$

10) $x^4\left(x^2+\frac{1}{4}\right)=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;0;0;\pm\frac{1}{2}i\right\}$

11) $x^2\left(x^3-\frac{8}{27}\right)=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\pm i\frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}$

12) $\frac{1}{5}x-125x^5=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;\pm\frac{1}{5};\pm\frac{1}{5}i\right\}$

13) $\left(x^2+3x\right)^2=0$ $\qquad S_R=\{0;0;-3;-3\}$

14) $\left(x^2-x\right)^3=0$ $\qquad S_R=\{0;0;0;1;1;1\}$

15) $\frac{2}{5}x^2-\frac{5}{8}x^6=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;\pm\frac{2}{\sqrt{5}};\pm\frac{2i}{\sqrt{5}}\right\}$

16) $4x^6+9x^2=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i);\frac{\sqrt{3}}{2}(-1\pm i)\right\}$

17) $x^4+6x^3+9x^2=0$ $\qquad S_R=\{0;0;-3;-3\}$

18) $x^4-x^2=0$ $\qquad S_R=\{0;0;\pm1\}$

19) $x-x^5=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\{0;\pm1;\pm i\}$

20) $x^5-25x=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;\pm\sqrt{5};\pm\sqrt{5}i\right\}$

21) $x^6+8x^3=0$ $\qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;0;-2;1\pm\sqrt{3}i\right\}$

22) $x^2(2x+1)^3=0$ $S_R=\left\{0;0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\}$

23) $x^7+2x^5+4x^3=0$ $S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;0;\pm i\sqrt{2}, doppie\right\}$

Risoluzioni

1) $4x^3+\frac{1}{2}=0$ Riducendo alla forma normale l'equazione il primo membro si presenta come somma di due cubi e si può scomporre applicando la relativa regola.

$8x^3+1=0 \to (2x+1)(4x^2-2x+1)=0$ Per la legge di annullamento del prodotto si ha

$$(2x+1=0)\vee(4x^2-2x+1=0)\to\left(x_1=-\frac{1}{2}\right)\vee\left(x=1\pm\sqrt{-3}=1\pm i\sqrt{3}\right).$$

Concludiamo che l'insieme delle radici dell'equazione è $S_{\mathbb{C}}=\left\{-\frac{1}{2};1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\right\}$

2) $1-x^4=0$ Il primo membro può essere visto come la differenza di due quadrati e lo si può scomporre in fattori, quindi applicare la legge di annullamento e del prodotto e ricondursi alla risoluzione di due equazioni di secondo grado.

$$1-x^4=0\to(1-x^2)(1+x^2)=0\to(1-x^2=0)\vee(1+x^2=0)\to(x=\pm1)\vee\left(x=\pm\sqrt{-1}=\pm i\right)$$

L'insieme delle radici dell'equazione è $S_{\mathbb{C}}=\{-1;1;-i;i\}$

3) $9x^5-\frac{1}{27}=0$ Per risolvere quest'equazione nel campo complesso si deve applicare la regola per il calcolo delle radici quinte di un numero complesso. Dall'uguaglianza

$x^5=\left(\frac{1}{3}\right)^5=\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot e^{i\cdot 2k\pi}$, con k∈Z, si ricava la seguente

$x=\frac{1}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{2k\pi}{5}}$, con k∈Z, dalla quale si ottengono valori diversi per attribuendo a k i valori 0, 1, 2,3, 4; per gli altri valori interi si ottengono ciclicamente i cinque valori già ottenuti. Le radici dell'equazione in oggetto sono

per k=0 $\to x=\frac{1}{3}$; per k=1 $\to x=\frac{1}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{5}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\cos\frac{2\pi}{5}\right)$;

per k=2 $\to x=\frac{1}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{5}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\cos\frac{4\pi}{5}\right)$; per k=3 $\to x=\frac{1}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{6\pi}{5}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\cos\frac{6\pi}{5}\right)$;

per k=4 $\to x=\frac{1}{3}\cdot e^{i\cdot\frac{8\pi}{5}}=\frac{1}{3}\cdot\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\cos\frac{6\pi}{5}\right)$.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione nel campo complesso è:

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ x \middle| x = \frac{1}{3} \cdot e^{i \cdot \frac{2k\pi}{5}}, k = 0,1,2,3,4 \right\}$$

4) $2x^6 - \frac{9}{8} = 0$ Scriviamo il primo membro come la differenza di due quadrati:

$$2x^6 - \frac{9}{8} = 0 \rightarrow \left(x^3\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0 \text{, da cui } \left(x^3 - \frac{3}{4}\right)\left(x^3 + \frac{3}{4}\right) = 0 \rightarrow \left(x^3 - \frac{3}{4} = 0\right) \vee \left(x^3 + \frac{3}{4} = 0\right)$$

Osserviamo ora che per la prima equazione sussistono le seguenti uguaglianze

$$x^3 - \frac{3}{4} = 0 \rightarrow x^3 - \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^3 = 0 \rightarrow \left(x - \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot x + \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2\right) = 0$$

Dall'ultima uguaglianza, per la legge di annullamento del prodotto ricaviamo

$x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ (prima radice);

$x^2 + \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot x + \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2 = 0$ Risolvendo quest'equazione di secondo grado si ottengono due ulteriori radici complesse. Infatti il suo discriminate è negativo e vale $\Delta = \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2 - 4\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2 = -3\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2$. Le due radici sono:

$$x = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \pm \sqrt{-3\left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2} = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \pm i\sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right)$$

Procedendo in modo analogo con la seconda equazione si ottengono altre tre radici.

$$x^3 + \frac{3}{4} = 0 \rightarrow \left(x + \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)\left(x^2 - \sqrt[3]{\frac{3}{4}} \cdot x + \left(\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)^2\right) = 0 \text{, da cui}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{3}{4}} = -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\ ;\ x = \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right).$$

L'insieme delle radici è $S_{\mathbb{C}} = \left\{ \sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(-1 \pm i\sqrt{3}\right); -\sqrt[3]{\frac{3}{4}}; \sqrt[3]{\frac{3}{4}}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right) \right\}$

5) $x^8 - 16 = 0 \rightarrow \left(x^4\right)^2 - 4^2 = 0 \rightarrow \left(x^4 - 4\right)\left(x^4 + 4\right) = 0 \rightarrow \left(x^2 - 2\right)\left(x^2 + 2\right)\left(x^4 + 4\right) = 0 \rightarrow \left(x^2 - 2 = 0\right) \vee$
$\left(x^2 + 2 = 0\right) \vee \left(x^4 + 4 = 0\right)$

$x^2-2=0 \to x=\pm\sqrt{2}$; $x^2+2=0 \to x=\pm\sqrt{-2}=\pm i\sqrt{2}$;

$x^4+4=0 \to x^4+2x^2+4-2x^2=0 \to \left(x^2+2\right)^2-\left(\sqrt{2}x\right)^2=0 \to \left(x^2-\sqrt{2}x+2\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+2\right)=0 \to$
$\left(x^2-\sqrt{2}x+2=0\right)\vee\left(x^2+\sqrt{2}x+2=0\right)$

Si devono risolvere separatamente due equazioni di secondo grado complete che presentano come discriminante $\Delta=2-8=-6$, quindi ammettono entrambe radici complesse.

$x^2-\sqrt{2}x+2=0 \to x=\dfrac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{6}}{2}$; $\quad x^2+\sqrt{2}x+2=0 \to x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{6}}{2}$.

Concludiamo che l'equazione in esame ammette due radici reali e 6 radici complesse (a due a due coniugate). L'insieme delle radici è: $S_{\mathbb{C}}=\left\{\pm\sqrt{2};\pm i\sqrt{2};\dfrac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{6}}{2};\dfrac{-\sqrt{2}\pm i\sqrt{6}}{2}\right\}$

6) $x^3-2x=0$ L'equazione ammette solo tre radici reali semplici. $S_R=\left\{0;\pm\sqrt{2}\right\}$

7) $2x^4-\dfrac{25}{2}x^2=0$ L'equazione ammette solo quattro radici reali, due delle quali coincidenti con 0.
$S_R=\left\{0;0;\pm\dfrac{5}{2}\right\}$

8) $\dfrac{5}{2}x^3-\dfrac{18}{5}x=0$ L'equazione ammette solo tre radici reali tutte distinte. $S_R=\left\{0;\pm\dfrac{6}{5}\right\}$

9) $x^5+\dfrac{0,01x^3}{0,25}=0 \to x^3\left(x^2+\dfrac{0,01}{0,25}\right)=0 \to \left(x^3=0\right)\vee\left(x^2+\dfrac{1}{25}=0\right) \to$ La radice x=0 ha molteplicità 3; altre due radici complesse (opposte tra loro) si ottengono dalla seconda equazione:

$x^2=-\dfrac{1}{25} \to x=\pm\sqrt{-\dfrac{1}{25}} \to x=\pm\dfrac{1}{5}i$. L'insieme delle radici nel campo complesso è: $S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;0;\pm\dfrac{1}{5}i\right\}$

10) $x^4\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)=0 \to \left(x^4=0\right)\vee\left(x^2+\dfrac{1}{4}=0\right) \to \left(x_1=x_2=x_3=x_4=0\right)\vee\left(x=\pm\dfrac{1}{2}i\right)$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;0;0;\pm\dfrac{1}{2}i\right\}$

11) $x^2\left(x^3-\dfrac{8}{27}\right)=0 \to \left(x^2=0\right)\vee\left(x^3-\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=0\right) \to \left(x_1=x_2=0\right)\vee\left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(x^2+\dfrac{2}{3}x+\dfrac{4}{9}\right)=0 \to$

$\left(x_1=x_2=0\right)\vee\left(x=\dfrac{2}{3}\right)\vee\left(x=-\dfrac{2}{3}\pm i\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ $\quad S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;\dfrac{2}{3};-\dfrac{2}{3}\pm i\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right\}$

12) $\frac{1}{5}x-125x^5=0 \to \frac{1}{5}x\left(1-5^4x^4\right)=0 \to (x=0)\vee\left(1-5^4x^4=0\right)$. La prima radice è x=0, da contare una volta (radice semplice). Procediamo con la seconda equazione .

$$\left(1-5^4x^4=0\right) \to \left(1-5^2x^2\right)\left(1+5^2x^2\right)=0 \to \left(x^2=\frac{1}{25}\right)\vee\left(x^2=-\frac{1}{25}\right) \to \left(x=\pm\frac{1}{5}\right)\vee\left(x=\pm\frac{1}{5}i\right)$$

L'insieme delle radici nel campo complesso è $S_{\mathbb{C}}=\left\{0;\pm\frac{1}{5};\pm\frac{1}{5}i\right\}$.

13) $\left(x^2+3x\right)^2=0 \to x^2(x+3)^2=0 \to \left(x^2=0\right)\vee\left((x+3)^2=0\right)$

Dalla prima equazione si ricava la soluzione doppia x=0. Per quanto concerne la seconda equazione osserviamo che ponendo x+3=y si riduce all'equazione monomia $y^2=0$ che ammette la radice y=0 con molteplicità 2; pertanto, tornando all'incognita x, poiché y=0 equivale a scrivere x=-3, si deduce che il valore x=-3 è radice con molteplicità 2. Concludiamo che l'equazione in esame ammette solo radici reali e l'insieme di queste è: $S_R=\{0;0;-3;-3\}$.

14) $\left(x^2-x\right)^3=0 \to x^3(x-1)^3=0 \to \left(x^3=0\right)\vee\left((x-1)^3=0\right)$ La prima equazione fornisce la soluzione x=0 da contare tre volte, la seconda x=1 da contare ancora tre volte. L'equazione in esame è di sesto grado e le sue radici sono tutte reali. $S_R=${0,tre volte;1, tre volte}.

15) $\frac{2}{5}x^2-\frac{5}{8}x^6=0 \to x^2\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{8}x^4\right)=0 \to \left(x^2=0\right)\vee\left(\frac{2}{5}\left(1-\frac{25}{16}x^4\right)\right)=0$

Si ricava la soluzione doppia x=0 dalla prima equazione. Per la seconda si ha:

$1-\frac{25}{16}x^4=0 \to \left(1-\frac{5}{4}x^2\right)\left(1+\frac{5}{4}x^2\right)=0$, dalla quale si ottengono le due equazioni

$1-\frac{5}{4}x^2=0$, che ammette le due radici reali $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$;

$1+\frac{5}{4}x^2=0$, che diventa $x^2=-\frac{4}{5}$, la quale ammette le due radici complesse $x=\pm\frac{2i}{\sqrt{5}}$.

In conclusione l'equazione in esame ammette nel campo complesso sei radici, delle quali quattro sono reali e due complesse: x=0 doppia, $x=\pm\frac{2}{\sqrt{5}}$, $x=\pm\frac{2i}{\sqrt{5}}$. $S_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;\pm\frac{2}{\sqrt{5}};\pm\frac{2i}{\sqrt{5}}\right\}$

16) $4x^6+9x^2=0 \to x^2\left(4x^4+9\right)=0 \to \left(x^2=0\right)\vee\left(4x^4+9=0\right)$

Il primo fattore fornisce la radice doppia x=0. Per il secondo fattore procediamo come segue.

$$4x^4+9=0 \rightarrow \left(x^2\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=0 \rightarrow \left(x^2\right)^2+3x^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-3x^2=0 \rightarrow \left(x^2+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}x\right)^2=0 \rightarrow$$

$$\left(x^2+\frac{3}{2}-\sqrt{3}x\right)\left(x^2+\frac{3}{2}+\sqrt{3}x\right)=0 \rightarrow \left(x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{2}=0\right) \vee \left(x^2+\sqrt{3}x+\frac{3}{2}=0\right)$$

Dall'equazione $x^2-\sqrt{3}x+\frac{3}{2}=0$ si ottengono le due radici complesse $x=\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i)$; dalla seconda equazione $x^2+\sqrt{3}x+\frac{3}{2}=0$ si ottengono le altre due radici complesse $x=\frac{\sqrt{3}}{2}(-1\pm i)$. Nel complesso l'insieme delle radici dell'equazione è $\mathrm{S}_{\mathbb{C}}=\left\{0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}(1\pm i);\frac{\sqrt{3}}{2}(-1\pm i)\right\}$.

*** ***

Le equazioni proposte dal n.17 al n.23 sono lasciate come esercizi per il lettore.