Discussione grafica di un sistema parametrico

(una parabola ed un fascio proprio di rette)

Utilizzando le conoscenze sull'equazione della parabola e di un fascio di rette nel piano cartesiano, discutere le soluzioni del seguente sistema parametrico

$$\begin{cases} x^2-4y-x+4=0 \\ x+(m-1)y-4(m-1)=0 \\ 0\le y\le 3 \end{cases}$$

Elaborazioni

Approccio al problema e strategia risolutiva

L'equazione di secondo grado rappresenta una parabola con asse di simmetria parallelo all'asse delle ordinate . L'equazione di primo grado nelle due variabili x, y, contenendo il parametro **m** con esponente uno, rappresenta un fascio di rette e poiché è evidente dalla sua struttura algebrica che la generica retta del fascio ha coefficiente angolare variabile si deduce che si tratta di un fascio proprio. Si tratta di stabilire per quali valori del parametro **m** la generica retta del fascio ruotando intorno al suo centro interseca l'arco della parabola i cui punti hanno ordinate comprese nell'intervallo [0;3], precisando anche il numero di punti comuni tra retta e parabola.

Dopo aver analizzato il fascio di rette per stabilirne il tipo (proprio o improprio), si devono determinare i valori del parametro corrispondenti alle particolari rette del fascio che passano per gli estremi dell'arco della parabola i cui punti hanno ordinata 0≤y≤3; una volta scoperto come si muovono le rette del fascio al variare del parametro e quale sia la loro posizione rispetto al suddetto arco di parabola, dedurre il numero delle intersezioni; questo numero indica quante soluzioni ammette il sistema per il valore considerato del parametro. Particolare attenzione si dovrà porre alle rette generatrici del fascio.

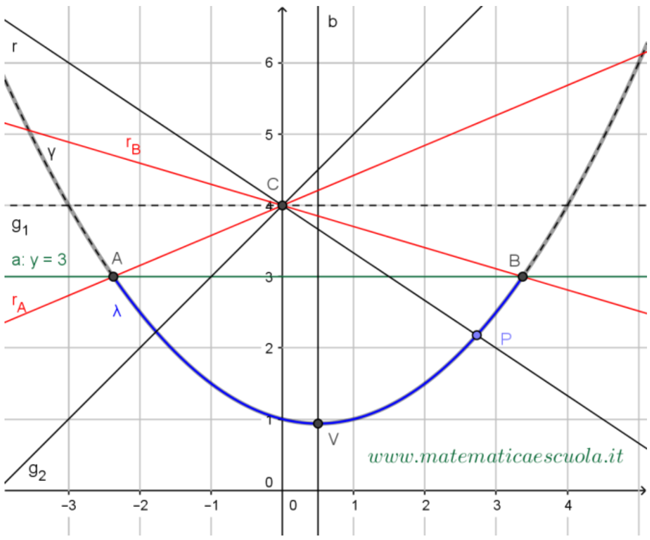

Figura 1- L'arco della parabola utile per le intersezioni della stessa con la generica retta r del fascio ha estremi A e B.

Analisi del fascio

Scriviamo in modo diverso l'equazione separando i termini contenenti il parametro dagli altri. Si ha:

$$x+(m-1)y-4(m-1)=0 \rightarrow m(y-4)+(x-y+4)=0$$

Le due rette generatrici del fascio sono: $g_1: y-4=0$, $g_2: x-y+4=0$.

La prima rappresenta la retta limite del fascio e la sua equazione non si può ottenere per alcun valore reale del parametro **m**. Le due rette si intersecano nel punto C(0;4), quindi il fascio è proprio.

In Figura 1 sono rappresentate le rette generatrici del fascio, la parabola $\gamma: x^2-4y-x-4=0$, la retta *a*:y=3 che interseca la parabola nei due punti A, B le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema formato dall'equazione della parabola e da quella della retta *a*. E' evidenziato in grassetto anche l'arco utile della parabola e la generica retta r del fascio che taglia l'arco nel punto P.

$$\begin{cases} \gamma: x^2-4y-x+4=0 \\ a: y=3 \end{cases} \rightarrow x^2-x-8=0 \rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{33}}{2};\ A\left(\frac{1-\sqrt{33}}{2};3\right)\ B\left(\frac{1+\sqrt{33}}{2};3\right).$$

Osserviamo che il vertice della parabola è il punto $V\left(\frac{1}{2};\frac{15}{15}\right)$.

Dall'analisi della figura si evincono le seguenti informazioni:

1) La parabola è collocata interamente nel semipiano delle ordinate positive e i suoi punti che hanno ordinata appartenente all'intervallo 0≤y≤3 sono solo quelli appartenenti all'arco di estremi A, B.
2) La **retta generatrice limite** del fascio non interseca l'arco utile AB mentre lo stesso è attraversato dalla seconda generatrice del fascio, la cui equazione si ottiene per m=0. Il fatto che la retta limite del fascio non intersechi l'arco utile permette di affermare che la generica retta del fascio può ruotare intorno al centro C senza soluzione di continuità per descrivere interamente l'arco AB. Si tratta di precisare quale sia il verso di rotazione per valori crescenti del parametro. Si scioglierà questa riserva non appena saranno stati determinati i valori del parametro **m** per i quali si hanno le rette del fascio passanti per gli estremi A e B. Quale che sia il verso di rotazione della generica retta del fascio intersecante l'arco AB, possiamo affermare che, con esclusione dell'asse delle ordinate (anch'esso appartiene al fascio; la sua equazione si ottiene per m=1), ciascuna di tali rette interseca la parabola in due punti propri(1) distinti dei quali solo uno appartiene all'arco in oggetto, mentre il secondo punto comune tra la retta e la parabola risulta avere ordinata y>4. Pertanto per i valori del parametro che vedremo il sistema in esame ammette una sola soluzione.
3) Determiniamo ora i valori del parametro corrispondenti alle rette passanti per A e per B.
   a. Imponiamo che le coordinate di A verifichino l'equazione del fascio.

   $$A\left(\frac{1-\sqrt{33}}{2};3\right) \in F: x+(m-1)y-4(m-1)=0 \rightarrow \frac{1-\sqrt{33}}{2}+3(m-1)-4(m-1)=0 \rightarrow$$
   $$m_A=\frac{3-\sqrt{33}}{2}$$

   b. Imponiamo che le coordinate di B verifichino l'equazione del fascio.

   $$B\left(\frac{1+\sqrt{33}}{2};3\right) \in F: x+(m-1)y-4(m-1)=0 \rightarrow m_B=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$$

   Osserviamo che $m_A<m_B$, quindi per valori crescenti del parametro la retta del fascio rispetto al centro C ruota in senso antiorario e descrive interamente l'arco AB per i valori del parametro **m** tali che $m_A \le m \le m_B$. Si conclude che per detti valori il sistema ammette una ed una sola soluzione e non vi sono altri valori per i quali si abbiano altre soluzioni.

(1) Si osservi che l'asse delle ordinate ha in comune con la parabola il vertice V (punto proprio) ed un punto all'infinito.