

Esercitazione sulle disequazioni esponenziali e logaritmiche⁽¹⁾

- | | | |
|--|-------|--|
| 1) $3^x - 1 \geq \sqrt{7 \cdot 3^x + 1}$ | (L.1) | $S: (x \geq 2)$ |
| 2) $6^x - 5 \cdot 3^x - 2^x + 5 < 0$ | (L.2) | $S: (0 < x < \log_2 5)$ |
| 3) $\frac{4 - 2^{x+1}}{9^x - 3^{x+1}} \geq 0$ | (L.2) | $S = \emptyset$ |
| 4) $\frac{4 \cdot 5^x}{5^{2x} - 1} + \frac{1}{2} \leq \frac{5^x + 3}{5^x + 1}$ | (L.3) | $S: (x < 0) \vee (x \geq 1)$ |
| 5) $ 2 - 2^{3x} \geq 3 \cdot 2^x$ | (L.5) | $S: (x \leq \log_2 \alpha) \vee (x \geq 1), \text{ con } \alpha \approx 0,5961$ |
| 6) $\frac{\log_2^2 x - 2 \log_2 x}{1 - \log_4 x} \leq 0$ | (L.3) | $S: (1 \leq x < 4) \vee (x > 4)$ |
| 7) $\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2 (x^2 + 2x) \right) < 0$ | (L.3) | $S: (x < -1 - \sqrt{3}) \vee (x > \sqrt{3} - 1)$ |
| 8) $\log_3 \left(\log_9 \left(\log_{\frac{1}{3}} (1 - x) \right) \right) \leq 1$ | (L.3) | $S: \left(\frac{2}{3} < x \leq 1 - 3^{-3^6} \right)$ |
| 9) $\frac{\sqrt[3]{\log_5 (3^{2x} + 2)} - 1}{\log_{\frac{1}{2}} (5x) - \log_2 (25x^2) + 1} \leq 0$ | (L.4) | $S: \left(0 < x < \frac{1}{2} \right) \wedge \left(x \neq \frac{2}{5} \right)$ |
| 10) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{2x - 1} > \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x - 1}$ | (L.3) | $S: (x > 2 + \sqrt{2})$ |

⁽¹⁾ Per ogni disequazione è indicato il livello di difficoltà (L.n) in una scala crescente da 1 a 5.

- 1) $3^x - 1 \geq \sqrt{7 \cdot 3^x + 1}$ La disequazione è equivalente al seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 3^x - 1 \geq 0 \\ (3^x - 1)^2 \geq (\sqrt{7 \cdot 3^x + 1})^2 \end{cases}, \text{ che diventa } \begin{cases} x \geq 0 \\ 3^{2x} - 2 \cdot 3^x + 1 \geq 7 \cdot 3^x + 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (3^x)^2 - 9 \cdot 3^x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 3^x \geq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \geq 2 \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = [2; +\infty[$.

- 2) $6^x - 5 \cdot 3^x - 2^x + 5 < 0$ Il primo membro della disequazione si trasforma scomponendolo in fattori.

$$3^x(2^x - 5) - (2^x - 5) < 0 \rightarrow (3^x - 1)(2^x - 5) < 0.$$

Studiando il segno dei due fattori ottenuti si ha

$$3^x - 1 > 0, \text{ soddisfatta per } x > 0;$$

$$2^x - 5 > 0, \text{ soddisfatta per } x > \log_2 5.$$

Poiché $\log_2 5 > 1$, dal confronto dei segni si deduce che il prodotto dei due fattori è negativo nell'intervallo $0 < x < \log_2 5$. L'insieme delle soluzioni è dunque $S =]0; \log_2 5[$.

- 3) $\frac{4 - 2^{x+1}}{9^x - 3^{x+1}} \geq 0$ Osserviamo che la disequazione è definita per i valori di x che rendono diverso da zero il denominatore, quindi per $x \neq 1$. Nel dominio indicato si deve studiare il segno del numeratore e del denominatore.

$$4 - 2^{x+1} \geq 0 \rightarrow 2(2 - 2^x) \geq 0 \rightarrow 2^x \leq 2, \text{ soddisfatta per } x \leq 1;$$

$$9^x - 3^{x+1} > 0 \rightarrow (3^x)^2 - 3 \cdot 3^x > 0 \rightarrow 3^x(3^x - 3) > 0 \rightarrow 3^x - 3 > 0 \rightarrow 3^x > 3, \text{ soddisfatta per } x > 1.$$

Dal confronto dei segni si evince che nel dominio di definizione trovato il numeratore ed il denominatore sono discordi, quindi la frazione assume solo valori negativi, pertanto la disequazione in esame non ha soluzioni: $S = \emptyset$.

- 4) $\frac{4 \cdot 5^x}{5^{2x} - 1} + \frac{1}{2} \leq \frac{5^x + 3}{5^x + 1}$ La disequazione è definita in $\mathbb{R}_0$. Per risolverla trasportiamo tutti i termini al primo membro, scomponiamo in fattori e riduciamo il primo membro ad una sola frazione. Seguono le elaborazioni.

$$\begin{aligned} \frac{4 \cdot 5^x}{(5^x - 1)(5^x + 1)} - \frac{5^x + 3}{5^x + 1} + \frac{1}{2} \leq 0 &\rightarrow \dots \rightarrow \frac{-(5^x)^2 + 4 \cdot 5^x + 5}{2(5^x - 1)(5^x + 1)} \leq 0 \rightarrow \frac{(5^x)^2 - 4 \cdot 5^x - 5}{5^x - 1} \geq 0 \rightarrow \frac{(5^x - 5)(5^x + 1)}{5^x - 1} \geq 0 \\ &\rightarrow \frac{5^x - 5}{5^x - 1} \geq 0 \end{aligned}$$

Questa disequazione è soddisfatta per $(x < 0) \vee (x \geq 1)$. $S =]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$.

- 5) $|2 - 2^{3x}| \geq 3 \cdot 2^x$ La disequazione è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è equivalente alla seguente $(2 - 2^{3x} \leq -3 \cdot 2^x) \vee (2 - 2^{3x} \geq 3 \cdot 2^x)$.

Risolvi separatamente le due disequazioni e uniamo i corrispondenti insiemi delle soluzioni.

Prima disequazione

$2 - 2^{3x} \leq -3 \cdot 2^x \rightarrow 2^{3x} - 3 \cdot 2^x - 2 \geq 0 \rightarrow (2^x)^3 - 3 \cdot 2^x - 2 \geq 0$ Con $2^x = y$ affrontiamo la disequazione ausiliaria $y^3 - 3y - 2 \geq 0$. Poiché $y^3 - 3y - 2 = (y+1)(y^2 - y - 2)$, e risulta $y+1 > 0$, si perviene alla disequazione equivalente $y^2 - y - 2 \geq 0$, soddisfatta per $(y \leq -1) \vee (y \geq 2)$ e tornando alla variabile x deve risultare $(2^x \leq -1) \vee (2^x \geq 2)$. La disuguaglianza $2^x \leq -1$ non ha soluzioni, rimane perciò $2^x \geq 2$, che è soddisfatta per $x \geq 1$.

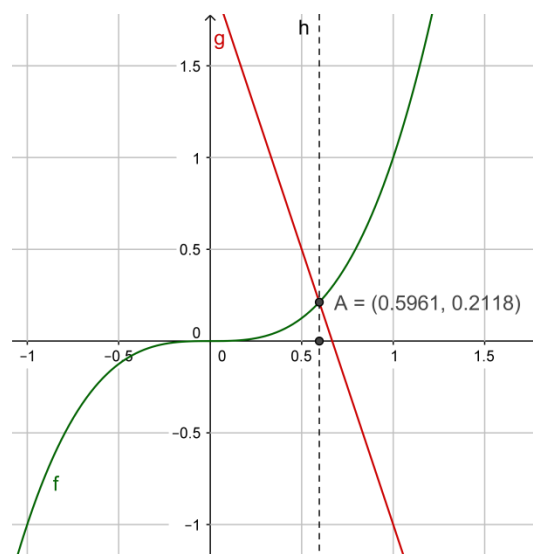
Seconda disequazione

$2 - 2^{3x} \geq 3 \cdot 2^x \rightarrow (2^x)^3 + 3 \cdot 2^x - 2 \leq 0$, ancora con la sostituzione $2^x = y$ si perviene alla disequazione $y^3 + 3y - 2 \leq 0$. Questa disequazione, scritta nella forma equivalente

$$y^3 \leq -3y + 2$$

si può risolvere per via grafica, confrontando i grafici delle funzioni $f: z = y^3$, $g: z = -3y + 2$. Si riscontra che la disequazione è soddisfatta per $y \leq \alpha \approx 0,5961$.

Tornando alla variabile x , la disequazione $(2^x)^3 + 3 \cdot 2^x - 2 \leq 0$ è soddisfatta per i valori di x tali che $2^x \leq \alpha$, quindi per $x \leq \log_2 \alpha$, con $\log_2 \alpha \approx -0,7468$.



- 6) $\frac{\log_2^2 x - 2 \log_2 x}{1 - \log_4 x} \leq 0$ $S: (1 \leq x < 4) \vee (x > 4)$

Elaboriamo la frazione fattorizzando e riducendo i logaritmi alla stessa base.

$$\frac{\log_2^2 x - 2 \log_2 x}{1 - \log_4 x} \leq 0 \rightarrow \frac{\log_2 x (\log_2 x - 2)}{1 - \frac{\log_2 x}{\log_2 4}} \leq 0 \rightarrow \frac{\log_2 x (\log_2 x - 2)}{1 - \frac{1}{2} \log_2 x} \leq 0 \rightarrow \frac{\log_2 x (\log_2 x - 2)}{2 - \log_2 x} \leq 0$$

La frazione è definita per i valori reali che verificano le C.d.E: (condizioni di esistenza)

$$C.d.E.: (x > 0) \wedge (\log_2 x - 2 \neq 0), \text{ che diventano } (x > 0) \wedge (x \neq 4).$$

Con dette condizioni si può semplificare il fattore $(\log_2 x - 2)$ presente al numeratore e al denominatore ottenendo la disequazione equivalente

$\log_2 x \geq 0$, soddisfatta per $x \geq 1$. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = [1; 4[\cup]4; +\infty[$.

$$7) \log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2 (x^2 + 2x) \right) < 0 \quad S =]-\infty; -1 - \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3} - 1; +\infty[$$

Tenendo conto delle caratteristiche di monotonia della funzione logaritmica elaboriamo come segue la disequazione.

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\log_2 (x^2 + 2x) \right) < 0 \rightarrow \log_2 (x^2 + 2x) > 1 \rightarrow x^2 + 2x > 2^1 \rightarrow x^2 + 2x - 2 > 0.$$

La disequazione di secondo grado ottenuta è soddisfatta per valori esterni all'intervallo delle radici dell'equazione associata. Le radici sono $x = -1 \pm \sqrt{3}$, quindi l'insieme delle soluzioni è $S =]-\infty; -1 - \sqrt{3}[\cup]\sqrt{3} - 1; +\infty[$.

$$8) \log_3 \left(\log_9 \left(\log_{\frac{1}{3}} (1-x) \right) \right) \leq 1$$

Risolviamo la disequazione applicando opportunamente le proprietà della funzione logaritmica, cominciando dalla funzione più esterna.

$$\log_3 \left(\log_9 \left(\log_{\frac{1}{3}} (1-x) \right) \right) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < \log_9 \left(\log_{\frac{1}{3}} (1-x) \right) \leq 3,$$

si deve impostare un sistema di due disequazioni

$$\begin{cases} \log_9 \left(\log_{\frac{1}{3}} (1-x) \right) > 0 \\ \log_9 \left(\log_{\frac{1}{3}} (1-x) \right) \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} (1-x) > 9^0 \\ 0 < \log_{\frac{1}{3}} (1-x) \leq 9^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} (1-x) > 1 \\ \log_{\frac{1}{3}} (1-x) \leq 9^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 0 < 1-x < \frac{1}{3} \\ 1-x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{3^3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x > \frac{2}{3} \\ x \leq 1 - 3^{-3^3} \end{cases} \rightarrow \frac{2}{3} < x \leq 1 - 3^{-3^3}.$$

In conclusione, l'insieme delle soluzioni della disequazione è: $S = \left] \frac{2}{3}; 1 - 3^{-3^3} \right]$.

$$9) \frac{\sqrt[3]{\log_5 (3^{2x} + 2) - 1}}{\log_{\frac{1}{2}} (5x) - \log_2 (25x^2) + 1} \leq 0 \quad (*)$$

Per risolvere la disequazione studiamo il segno e gli zeri del numeratore e il segno del denominatore; per quest'ultimo ridurremo i logaritmi alla stessa base.

$$\sqrt[3]{\log_5 (3^{2x} + 2) - 1} \geq 0 \Leftrightarrow \log_5 (3^{2x} + 2) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \log_5 (3^{2x} + 2) \geq 1 \Leftrightarrow (3^{2x} + 2) \geq 5^1;$$

la disequazione esponenziale si riduce alla forma $3^{2x} \geq 3$, che è soddisfatta se e solo se $2x \geq 1$, quindi per $x \geq \frac{1}{2}$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(5x) - \log_2(25x^2) + 1 > 0 \Leftrightarrow \left(\log_{\frac{1}{2}}(5x)\right)^2 - \log_2(5x)^2 + 1 > 0$$

Le funzioni logaritmiche presenti nell'espressione esistono per i valori di x tali che $5x > 0$, quindi con $x > 0$. Con questa condizione procediamo con la trasformazione della disequazione.

$$\left(\frac{\log_2(5x)}{\log_2\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^2 - 2\log_2(5x) + 1 > 0 \rightarrow \left(\frac{\log_2(5x)}{-1}\right)^2 - 2\log_2(5x) + 1 > 0 \rightarrow (\log_2(5x))^2 - 2\log_2(5x) + 1 > 0$$

Poniamo a questo punto per brevità $\log_2(5x) = y$ e passiamo alla disequazione ausiliaria

$y^2 - 2y + 1 > 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 > 0$, soddisfatta per $\forall y \neq 1$ e tornando alla variabile x , la disequazione è soddisfatta se e solo se

$$\log_2(5x) \neq 1 \Leftrightarrow (5x \neq 2) \wedge (x > 0), \text{ dunque, se e solo se } \left(x \neq \frac{2}{5}\right) \wedge (x > 0).$$

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore si deduce che la disequazione (*) è soddisfatta nell'insieme $S = \left]0; \frac{2}{5}\right[\cup \left]\frac{2}{5}; \frac{1}{2}\right[$.

10) $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{2x-1} > \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x-1}$

Riducendo i due logaritmi alla stessa base si ottiene la disequazione

$$\frac{\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{2x-1}}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^2} > \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x-1} \rightarrow \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{2x-1} > \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{x-1}$$

La disequazione è definita per i valori di x tali che $(2x-1 > 0) \wedge (x-1 > 0)$, quindi per $x > 1$. In questo dominio la disequazione si trasforma nell'equivalente

$\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{2x-1} > \log_{\frac{1}{5}} (\sqrt{x-1})^2 \rightarrow \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{2x-1} > \log_{\frac{1}{5}} (x-1)$, e tenendo conto delle caratteristiche della funzione logaritmica con base compresa tra 0 e 1 si passa alla disequazione equivalente

$\sqrt{2x-1} < x-1$. Questa disequazione nel dominio $D: (x > 1)$ si trasforma elevando al quadrato i due membri

$2x-1 < (x-1)^2$ che si riduce alla disequazione $x^2 - 4x + 2 > 0$, soddisfatta per

$(x < 2 - \sqrt{2}) \vee (x > 2 + \sqrt{2})$. Tenendo conto del dominio di definizione D , poiché $2 - \sqrt{2} < 1$,

concludiamo che la disequazione in oggetto è soddisfatta nell'insieme $S =]2 + \sqrt{2}; +\infty[$.