

Sistemi lineari parametrici e non

$$\mathbf{a})^{(1)} \begin{cases} (1-k)x_1 + (k-4)x_2 = -1 \\ (5-k)x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{b})^{(2)} \begin{cases} kx_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{c})^{(3)} \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 5 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\mathbf{d}) \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Si hanno } \infty^1 \text{ soluzioni che sono: } x_1 = \frac{10-\alpha}{5}, x_2 = -\frac{7\alpha}{5} - 1, x_3 = \alpha, \forall \alpha \in R$$

$$\mathbf{e}) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{Si hanno } \infty^1 \text{ soluzioni che sono: } x_1 = \alpha, x_2 = \frac{13}{2} - \alpha, x_3 = -\frac{1}{2}, \forall \alpha \in R$$

$$\mathbf{f})^{(4)} \begin{cases} x_1 + kx_2 - x_3 = 0 \\ kx_2 + 2x_3 = 0 \\ kx_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Risposta

Con $\left(k \neq -\frac{2}{3}\right) \wedge (k \neq 1)$ il sistema ammette la soluzione $x_1 = \frac{-3k}{3k^2 - k - 2}; x_2 = \frac{2}{3k^2 - k - 2}; x_3 = \frac{-k}{3k^2 - k - 2}$.

Con $\left(k = -\frac{2}{3}\right) \vee (k = 1)$ il sistema non ha soluzioni.

Elaborazioni

Sistema a)

1) Scriviamo le matrici A e C rispettivamente dei coefficienti delle incognite e completa.

$$A = \begin{pmatrix} 1-k & k-4 & 0 \\ 0 & 5-k & -4 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1-k & k-4 & 0 & -1 \\ 0 & 5-k & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Calcoliamo il determinante di A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-k & k-4 & 0 \\ 0 & 5-k & -4 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1-k)(k-5) - 16(k-4) = \dots = -k^2 - 10k + 59$$

Risolviamo l'equazione $|A| = 0$, da cui $k^2 + 10k - 59 = 0$; si hanno le due radici reali distinte

$$k = -5 \pm 2\sqrt{21}.$$

⁽¹⁾ Esercizio assegnato nella prova d'esame di Matematica Generale per Economia il 9-11-2015, Lecce

⁽²⁾ Esercizio assegnato nella prova d'esame di Matematica Generale per Economia il 3-02-2015, Lecce

⁽³⁾ Esercizio assegnato nella prova d'esame di Matematica Generale per Economia il 23-06-2014, Lecce

⁽⁴⁾ Esercizio simile assegnato nella prova d'esame di Matematica Generale per Economia il 3-02-2014, Lecce

3) Discussione

- Con $(k \neq -5 - 2\sqrt{21}) \wedge (k \neq -5 + 2\sqrt{21})$ la matrice A ha rango 3 e conseguentemente anche la matrice completa C ha rango 3; il sistema ammette una sola soluzione; i corrispondenti valori delle incognite si possono ottenere applicando il metodo di Cramer. Risulta:

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} -1 & k-4 & 0 \\ 0 & 5-k & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 21-5k, \quad \text{da cui } x_1 = \frac{D_{x_1}}{|A|} = \frac{21-5k}{-k^2-10k+59};$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} 1-k & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 20-4k, \quad \text{da cui } x_2 = \frac{D_{x_2}}{|A|} = \frac{20-4k}{-k^2-10k+59};$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} 1-k & k-4 & -1 \\ 0 & 5-k & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = k^2-10k+25, \quad \text{da cui } x_3 = \frac{D_{x_3}}{|A|} = \frac{k^2-10k+25}{-k^2-10k+59}.$$

- Con $k = k_1 = -5 - 2\sqrt{21}$ la matrice completa $C = \begin{pmatrix} 1-k_1 & k_1-4 & 0 & -1 \\ 0 & 5-k_1 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

presenta il minore del terzo ordine associato alla matrice estratta formata con le colonne 1°, 3°, 4°,

$$4^\circ, M_1 = \begin{vmatrix} 1-k & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4(k_1-5) \neq 0, \text{ quindi C ha rango 3. Poiché la matrice A ha}$$

certamente rango minore di 3, per il teorema di Rouché-Capelli si conclude che per il valore indicato di k il sistema non ammette soluzioni.

- Con $k = k_2 = -5 + 2\sqrt{21}$ eseguendo le elaborazioni si riconosce che la matrice completa C ha ancora rango 3 e quindi che il sistema di equazioni è ancora incompatibile.

*** **

Sistema b)

- Scriviamo le matrici A e C rispettivamente dei coefficienti delle incognite e completa.

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -k & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcoliamo il determinante di A.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 1 & -k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = -k(k^2 + 3)$$

L'equazione $|A| = 0$ ammette l'unica soluzione reale $k = 0$.

3) Discussione

- Con $k \neq 0$ la matrice A ha rango 3 e quindi anche la matrice C ha rango 3; il sistema ammette una sola soluzione. Ricerca dei valori delle incognite con il metodo di Cramer.

$$D_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = 1 - k, \quad \text{da cui } x_1 = \frac{D_{x_1}}{|A|} = \frac{k-1}{k(k^2+3)};$$

$$D_{x_2} = \begin{vmatrix} k & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = -(k+1), \quad \text{da cui } x_2 = \frac{D_{x_2}}{|A|} = \frac{k+1}{k(k^2+3)};$$

$$D_{x_3} = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 1 & -k & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - 1, \quad \text{da cui } x_3 = \frac{D_{x_3}}{|A|} = \frac{k^2+1}{k(k^2+3)}.$$

- Con $k = 0$ il sistema diventa $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ e la matrice completa $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

presenta il minore del terzo ordine formato con le colonne 2°, 3°, 4°

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ quindi } C \text{ ha rango } 3. \text{ Poiché la matrice } A \text{ ha rango minore di } 3, \text{ per}$$

il teorema di Rouché-Capelli si conclude che per il valore indicato di k il sistema non ammette soluzioni.

*** **

Sistema c)

- Il sistema è formato con un numero di equazioni minore del numero delle incognite. Le matrici dei coefficienti delle incognite e quella completa sono rispettivamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Si riconosce che entrambe le matrici hanno rango $r=2$. Per esempio, considerando il minore del secondo ordine formato con le prime due colonne è diverso da zero: $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$, di conseguenza il sistema è compatibile ed essendo 3 le incognite ammette $\infty^{3-2} = \infty^1$ soluzioni. Possiamo determinare le soluzioni trasportando nelle due equazioni i termini con x_3 al secondo membro, quindi ponendo $x_3 = \alpha$ e risolvendo il sistema. Risulta

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_3 + 5 \\ x_1 - x_2 = -x_3 + 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3\alpha + 5 \\ x_1 - x_2 = -\alpha + 7 \end{cases}.$$

Utilizzando il metodo di addizione e sottrazione si ricava successivamente

$$2x_1 = 2\alpha + 12 \rightarrow x_1 = \alpha + 6;$$

$$2x_2 = 4\alpha - 2 \rightarrow x_2 = 2\alpha - 1$$

Concludiamo che le ∞^1 soluzioni sono le terne di numeri reali $(\alpha + 6; 2\alpha - 1; \alpha)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

*** **

Sistemi d), e)

Con procedimenti analoghi a quello seguito per la risoluzione del sistema c) si riconosce che i due sistemi sono compatibili e che le soluzioni sono quelle indicate.

*** **

Sistema f)

Viene lasciato come utile esercizio al lettore.