Esercizi sui determinanti

E1) Provare che sono nulli i valori dei seguenti determinati

$$D_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix},\qquad D_3=\begin{vmatrix}10&15&20\\30&35&40\\45&50&55\end{vmatrix}$$

E2) Provare che valgono zero i seguenti determinanti.

$$D_1=\begin{vmatrix}10&100&1000\\10^4&10^5&10^6\\10^7&10^8&10^9\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}10^k&10^{k+1}&10^{k+2}\\10^{-k}&10^{-k+1}&10^{-k+2}\\10^k&10^{k-1}&10^{k-2}\end{vmatrix}$$

E3) Calcolare i valori dei seguenti determinati sfruttando opportunamente le proprietà dei determinanti.

$$D_1=\begin{vmatrix}900&1&1\\100&-1&0\\9&2&0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}100&1&1\\900&-1&0\\9&2&0\end{vmatrix}\quad,\qquad D_2=\begin{vmatrix}x&x&x&x\\1&x&x&x\\1&1&x&x\\1&1&1&x\end{vmatrix}$$

Risposte: $D_1=2018$, $D_2=x(x-1)^3$

E4) Provare che valgono zero i seguenti determinanti

$$D_1=\begin{vmatrix}1&11&21&31\\2&12&22&32\\3&13&23&33\\4&14&24&34\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&11&21&31\\41&51&61&71\\81&91&101&111\\121&131&141&151\end{vmatrix}$$

E5) Provare che valgono zero i seguenti determinanti

$$D_1=\begin{vmatrix}a&a+p&a+2p&a+3p\\b&b+p&b+2p&b+3p\\c&c+p&c+2p&c+3p\\d&d+p&d+2p&d+3p\end{vmatrix}$$, quali che siano i valori attribuiti ai parametri a, b, c, d, p.

$$D_2=\begin{vmatrix}a&a+p&a+2p&a+3p\\b&b+q&b+2q&b+3q\\c&c+r&c+2r&c+3r\\d&d+s&d+2s&d+3s\end{vmatrix},$$

quali che siano i valori attribuiti ai parametri a, b, c, d, p, q, r, s .

*** ***

Soluzione

E1)

$$D_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$$

Sostituendo la seconda riga con la differenza tra la seconda e la prima e la terza riga con la differenza tra la terza e la prima si ottiene un determinante equivalente a quello di partenza

$$D_1=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\4-1&5-2&6-3\\7-1&8-2&9-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&3&3\\6&6&6\end{vmatrix}$$

Il determinante ottenuto vale zero perché ha la seconda e la terza riga proporzionali.

***

$$D_2=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\\13&14&15&16\end{vmatrix}$$

Trasformiamo il determinante sottraendo alle righe seconda, terza e quarta la prima riga. Si ottiene il determinante

$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\4&4&4&4\\8&8&8&8\\12&12&12&12\end{vmatrix}$, che vale zero perché ha le ultime tre righe proporzionali. Osserviamo che il determinante si può anche scrivere nella seguente forma $4\cdot8\cdot12\cdot\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}$.

***

$$D_3=\begin{vmatrix}10&15&20\\30&35&40\\45&50&55\end{vmatrix}=\text{(Possiamo estrarre da ciascuna riga il fattore 5)}\qquad 5\cdot5\cdot5\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\6&7&8\\9&10&11\end{vmatrix}=$$

Si può ora sottrarre la prima riga alla seconda e alla terza ottenendo

$$5\cdot5\cdot5\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\4&4&4\\7&7&7\end{vmatrix}=\text{(estraiamo il fattore 4 dalla seconda ed il fattore 7 dalla terza)}\ 5^3\cdot4\cdot7\cdot\begin{vmatrix}2&3&4\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}$$

Il determinante residuo è nullo perché ha due righe uguali.

*** ***

E2)

$$D_1=\begin{vmatrix}10&100&1000\\10^4&10^5&10^6\\10^7&10^8&10^9\end{vmatrix}=10\cdot10^4\cdot10^7\cdot\begin{vmatrix}1&10&10^2\\1&10&10^2\\1&10&10^2\end{vmatrix}$$

Il determinante ottenuto è nullo perché ha le tre colonne che sono proporzionali. Infatti si può scrivere ancora:

$$10\cdot 10^4\cdot 10^7\cdot\begin{vmatrix}1 & 10 & 10^2\\1 & 10 & 10^2\\1 & 10 & 10^2\end{vmatrix}=10^{12}\cdot 10\cdot 10^2\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$$

***

$$D_2=\begin{vmatrix}10^k & 10^{k+1} & 10^{k+2}\\10^{-k} & 10^{-k+1} & 10^{-k+2}\\10^k & 10^{k-1} & 10^{k-2}\end{vmatrix}=10^k\cdot 10^{-k}\cdot 10^k\begin{vmatrix}1 & 10 & 10^2\\1 & 10 & 10^2\\1 & 10^{-1} & 10^{-2}\end{vmatrix}=10^k\begin{vmatrix}1 & 10 & 10^2\\1 & 10 & 10^2\\1 & 10^{-1} & 10^{-2}\end{vmatrix}=0$$

*** ***

E3)

$$D_1=\begin{vmatrix}900 & 1 & 1\\100 & -1 & 0\\9 & 2 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}100 & 1 & 1\\900 & -1 & 0\\9 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}900+100 & 1 & 1\\100+900 & -1 & 0\\9+9 & 2 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1000 & 1 & 1\\1000 & -1 & 0\\9+9 & 2 & 0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1000 & -1\\18 & 2\end{vmatrix}=$$

$$2000+18=2018$$

$$D_2=\begin{vmatrix}x & x & x & x\\1 & x & x & x\\1 & 1 & x & x\\1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}=x\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & x & x & x\\1 & 1 & x & x\\1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}=\text{(sottraiamo la prima riga alle altre)}$$

$$x\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & x-1 & x-1 & x-1\\0 & 0 & x-1 & x-1\\0 & 0 & 0 & x-1\end{vmatrix}=$$

(sviluppiamo il determinante con la regola di Laplace applicata alla prima colonna)

$$x\begin{vmatrix}x-1 & x-1 & x-1\\0 & x-1 & x-1\\0 & 0 & x-1\end{vmatrix}=\text{(estraendo il fattore }(x\text{-1) da ciascuna riga si ha)}$$

$$x(x-1)^3\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{vmatrix}=x(x-1)^3$$

*** ***

E4) Dobbiamo provare che valgono zero i seguenti determinanti

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 11 & 21 & 31\\2 & 12 & 22 & 32\\3 & 13 & 23 & 33\\4 & 14 & 24 & 34\end{vmatrix},\qquad D_2=\begin{vmatrix}1 & 11 & 21 & 31\\41 & 51 & 61 & 71\\81 & 91 & 101 & 111\\121 & 131 & 141 & 151\end{vmatrix}$$

Per $\mathbf{D_1}$ osserviamo che sottraendo:

- la prima riga alla seconda,

- la seconda riga alla terza,
- la terza riga alla quarta,

il determinante ottenuto ha lo stesso valore. Il determinante è

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 11 & 21 & 31 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ che vale zero avendo tre righe uguali.

***

Per $\mathbf{D_2}$ sottraiamo:

- la prima colonna alla seconda;
- la seconda colonna alla terza;
- la terza colonna alla quarta.

Si ottiene il determinante indicato a lato che ha lo stesso valore del determinante di partenza; il determinante ottenuto è però nullo perché ….

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 10 & 10 \\ 41 & 10 & 10 & 10 \\ 81 & 10 & 10 & 10 \\ 121 & 10 & 10 & 10 \end{vmatrix}$$

E5) Provare che valgono zero i seguenti determinanti

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & a+p & a+2p & a+3p \\ b & b+p & b+2p & b+3p \\ c & c+p & c+2p & c+3p \\ d & d+p & d+2p & d+3p \end{vmatrix},$$ quali che siano i valori attribuiti ai parametri *a*, *b*, *c*, *d*, *p*.

Sottraiamo la prima colonna alle colonne 2°, 3° e 4°. Si ricava il determinante equivalente

$$D_1 = \begin{vmatrix} a & p & 2p & 3p \\ b & p & 2p & 3p \\ c & p & 2p & 3p \\ d & p & 2p & 3p \end{vmatrix}$$ che vale zero perché ha le colonne 2°, 3° e 4° proporzionali .

***

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & a+p & a+2p & a+3p \\ b & b+q & b+2q & b+3q \\ c & c+r & c+2r & c+3r \\ d & d+s & d+2s & d+3s \end{vmatrix},$$

quali che siano i valori attribuiti ai parametri *a, b, c, d, p, q, r, s* .

Sottraiamo la prima colonna alle colonne 2°, 3° e 4°. Si ricava il determinante equivalente

$$D_2 = \begin{vmatrix} a & p & 2p & 3p \\ b & q & 2q & 3q \\ c & r & 2r & 3r \\ d & s & 2s & 3s \end{vmatrix}$$ che vale zero perché ha le colonne 2°, 3° e 4° proporzionali .