

Sulle disequazioni logaritmiche

- 1) $\log_3(3-x) > -1$ $S = \left] -\infty; \frac{8}{3} \right[$
- 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) < -2$ $S = \left] \frac{10}{3}; +\infty \right[$
- 3) $(\log_2 x)^2 - \frac{1}{2} \log_2 x < 0$ $S = \left] 1; \sqrt{2} \right[$
- 4) Determinare il dominio di definizione della funzione $f(x) = \log\left(\frac{\log_x 2 - 1}{\log_4 x + 1}\right)$
 $D = \left] 0; \frac{1}{4} \right[\cup \left] 1; 2 \right[$
- 5) $\log_{\frac{1}{2}}\left(1 + \log_{\frac{1}{4}}(3x^2 + 4)\right) \leq 0$ $S = \emptyset$
- 6) Determinare il dominio di definizione della seguente funzione $f(x) = \left(\frac{2 - \log_2(1-x)}{2\log_4 x + (\log_2 x)^2}\right)^{\frac{1}{4}}$
 $S = \left] 0; \frac{1}{2} \right[$

Soluzione

- 1) $\log_3(3-x) > -1 \rightarrow 3-x > 3^{-1} \rightarrow x < \frac{8}{3}$. Quindi l'insieme delle soluzioni della disequazione è
 $S = \left] -\infty; \frac{8}{3} \right[$.
- 2) $\log_{\frac{1}{3}}(3x-1) < -2 \rightarrow 3x-1 > \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \rightarrow 3x-1 > 9 \rightarrow x > \frac{10}{3}$. L'insieme delle soluzioni è
 $S = \left] \frac{10}{3}; +\infty \right[$.
- 3) $(\log_2 x)^2 - \frac{1}{2} \log_2 x < 0 \rightarrow 2(\log_2 x)^2 - \log_2 x < 0 \rightarrow \log_2 x(2\log_2 x - 1) < 0 \rightarrow 0 < \log_2 x < \frac{1}{2} \rightarrow$
 $1 < x < \sqrt{2}$. L'insieme delle soluzioni è l'intervallo $S = \left] 1; \sqrt{2} \right[$.
- 4) $f(x) = \log\left(\frac{\log_x 2 - 1}{\log_4 x + 1}\right)$ Per l'esistenza della funzione deve essere soddisfatta la condizione

$$\frac{\log_x 2 - 1}{\log_4 x + 1} > 0 \text{ che elaboriamo come segue}$$

$$\left(\frac{\log_2 2}{\log_2 x} - 1\right) \frac{1}{\log_4 x + 1} > 0 \rightarrow \left(\frac{1}{\log_2 x} - 1\right) \frac{1}{\log_4 x + 1} > 0 \rightarrow \frac{1 - \log_2 x}{\log_2 x \cdot (\log_4 x + 1)} > 0$$

A questo punto osserviamo che per l'esistenza del primo membro devono essere soddisfatte le seguenti condizioni

C.d.E. $(x > 0) \wedge (\log_2 x \neq 0) \wedge (\log_4 x + 1 \neq 0)$, da cui $(x > 0) \wedge (x \neq 1) \wedge \left(x \neq \frac{1}{4}\right)$. Operiamo dunque nell'insieme $E =]0; +\infty[- \left\{\frac{1}{4}; 1\right\}$.

Nel dominio E ottenuto studiamo il segno dei fattori che compaiono al numeratore o al denominatore. Si ha:

$$F_1(x) = 1 - \log_2 x > 0 \rightarrow \log_2 x < 1 \rightarrow 0 < x < 2;$$

$$F_2(x) = \log_2 x > 0 \rightarrow x > 1;$$

$$F_3(x) = \log_4 x + 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{4}.$$

Confrontando il segno dei tre fattori nel dominio E si riscontra che il prodotto degli stessi è positivo in ciascuno dei due intervalli $]0; \frac{1}{4}[$, $]1; 2[$ e pertanto l'insieme di definizione della funzione in esame è $D =]0; \frac{1}{4}[\cup]1; 2[$.

- 5) $\log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \log_{\frac{1}{4}} (3x^2 + 4) \right) \leq 0$ Poiché la base del logaritmo più esterno è compresa tra 0 ed 1 la disuguaglianza è verificata per i valori della variabile x che soddisfanno la seguente condizione $1 + \log_{\frac{1}{4}} (3x^2 + 4) \geq 1$, da cui $\log_{\frac{1}{4}} (3x^2 + 4) \geq 0$; quest'ultima è equivalente alla seguente doppia disuguaglianza

$0 < 3x^2 + 4 \leq 1$, da cui $x^2 \leq -1$. Poiché la disuguaglianza ottenuta non ha soluzioni concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è vuoto. $S = \emptyset$

- 6) $f(x) = \left(\frac{2 - \log_2(1-x)}{2\log_4 x + (\log_2 x)^2} \right)^{\frac{1}{4}}$ La funzione si può scrivere nella forma seguente

$$f(x) = \sqrt[4]{\frac{2 - \log_2(1-x)}{2\log_4 x + (\log_2 x)^2}}, \text{ dalla quale si riconosce che per la sua esistenza deve essere non}$$

negativo l'argomento della radice quarta, quindi si deve determinare l'insieme delle soluzioni della disequazione

$$\frac{2 - \log_2(1-x)}{2\log_4 x + (\log_2 x)^2} \geq 0. \quad (*)$$

Osserviamo preliminarmente che per l'esistenza del primo membro della disuguaglianza devono essere soddisfatte le seguenti condizioni

C.d.E. $(1-x > 0) \wedge (x > 0) \wedge (2\log_4 x + (\log_2 x)^2 \neq 0)$ che sviluppiamo.

Le prime due condizioni forniscono la doppia limitazione $0 < x < 1$; per la terza condizione si ha

$$2\log_4 x + (\log_2 x)^2 \neq 0 \rightarrow 2 \cdot \frac{\log_2 x}{\log_2 4} + (\log_2 x)^2 \neq 0 \rightarrow \log_2 x + (\log_2 x)^2 \neq 0 \rightarrow \log_2 x \cdot (1 + \log_2 x) \neq 0,$$

da cui $(\log_2 x \neq 0) \wedge (1 + \log_2 x \neq 0)$, quindi $(x \neq 1) \wedge \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$.

In conclusione l'insieme di esistenza del primo membro della disequazione è

$$E = \left]0; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 1\right[.$$

Nell'insieme E studiamo dunque il segno del numeratore e del denominatore della frazione.

$$N(x) = 2 - \log_2(1-x) \geq 0 \rightarrow \log_2(1-x) \leq 2 \rightarrow 0 < 1-x \leq 4, \text{ da cui } -3 \leq x < 1;$$

$$D(x) = 2\log_4 x + (\log_2 x)^2 > 0 \rightarrow \log_2 x + (\log_2 x)^2 > 0 \rightarrow \log_2 x \cdot (1 + \log_2 x) > 0.$$

Osserviamo ora che dalla teoria delle disequazioni di secondo grado sappiamo che il prodotto dei due fattori è positivo se e solo risulta

$$(\log_2 x < -1) \vee (\log_2 x > 0), \text{ quindi per } \left(0 < x < \frac{1}{2}\right) \vee (x > 1). \text{ Poiché l'insieme di ricerca è il dominio}$$

E, concludiamo che la disequazione $D(x) > 0$ è soddisfatta solo per $\left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$.

Confrontando infine il segni del numeratore e del denominatore al variare di x nel dominio E deduciamo che la frazione al primo membro della disuguaglianza (*) è strettamente positiva

nell'intervallo $\left]0; \frac{1}{2}\right[$ e strettamente negativa nell'intervallo $\left]\frac{1}{2}; 1\right[$; quindi l'insieme delle soluzioni

della disequazione in esame è $S = \left]0; \frac{1}{2}\right[$.