

Esercizi sulle equazioni esponenziali

- 1) $3^{2-8x} = 9^{1+2x}$ $S = \{0\}$
- 2) $\left(\frac{3}{2}\right)^{1-x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{3x+1}$ $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
- 3) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-2x} = (0,16)^{4x-1}$ $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
- 4) $2\sqrt[3]{2\sqrt{2^x}} = 0,125$ $S = \left\{-\frac{78}{3}\right\}$
- 5) $\pi^{x-\frac{\pi}{2}} = \sqrt[4]{\pi^x}$ $S = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$
- 6) $\pi^x + \pi^{2x} = \pi^{3x} + \pi^{4x}$ $S = \{0\}$
- 7) $2^{x^2-x} = 4^{-x+3}$ $S = \{-3; 2\}$
- 8) $\frac{4^x}{2^{x^2-1}} = \frac{k}{8}$ determinare per quale valore di k l'equazione ammette come soluzione il valore $x=-1$. In corrispondenza al valore determinato precisare se l'equazione ammette altre soluzioni.

Risposte: $k=2$. L'equazione che si ottiene ha come insieme di soluzioni $S = \{-1; 3\}$.

- 9) $2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 2 = 0$ $S = \{-\log_3 2; \log_3 2\}$
- 10) $4^{\frac{1}{2x}} + 2^{\frac{1}{x}} = 1$ $S = \{-1\}$

Soluzione

$$1) \quad 3^{2-8x} = 9^{1+2x} \rightarrow 3^{2-8x} = 3^{2(1+2x)} \rightarrow 2-8x = 2+4x \rightarrow 12x = 0 \rightarrow x = 0$$

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{0\}$.

$$2) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{1-x} = \left(\frac{8}{27}\right)^{3x+1} \rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{1-x} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right)^{3x+1} \rightarrow 1-x = -3(3x+1) \rightarrow 8x = -4 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

$$3) \quad \left(\frac{5}{2}\right)^{-2x} = (0,16)^{4x-1} \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-2x} = \left(\frac{16}{100}\right)^{4x-1} \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-2x} = \left(\frac{4}{25}\right)^{4x-1} \rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-2x} = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right)^{4x-1} \rightarrow$$

$$-2x = -2(4x-1) \rightarrow 3x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{3}.$$

L'insieme delle soluzioni è $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$$4) \quad 2\sqrt[3]{2\sqrt{2^x}} = 0,125 \rightarrow 2\sqrt[3]{2 \cdot 2^{\frac{x}{2}}} = \frac{125}{1000} \rightarrow 2\sqrt[3]{2^{1+\frac{x}{2}}} = \frac{1}{8} \rightarrow 2\left(2^{1+\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{-3} \rightarrow 2 \cdot 2^{\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{2}\right)} = 2^{-3} \rightarrow$$

$$2^{1+\frac{1}{3}+\frac{x}{6}} = 2^{-3} \rightarrow 1 + \frac{1}{3} + \frac{x}{6} = -3 \rightarrow x = -\frac{78}{3}$$

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \left\{-\frac{78}{3}\right\}$.

$$5) \quad \pi^{x-\frac{\pi}{2}} = \sqrt[4]{\pi^x} \rightarrow \pi^{x-\frac{\pi}{2}} = \pi^{\frac{x}{4}} \rightarrow x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}.$$

L'insieme delle soluzioni è $S = \left\{\frac{3\pi}{4}\right\}$.

$$6) \quad \pi^x + \pi^{2x} = \pi^{3x} + \pi^{4x} \rightarrow \pi^x(1 + \pi^x) = \pi^{3x}(1 + \pi^x)$$

Osserviamo che il fattore $(1 + \pi^x)$ è strettamente positivo, quindi l'equazione esponenziale si riduce alla seguente equazione equivalente

$$\pi^x = \pi^{3x}, \text{ da cui } x = 3x, \text{ quindi } x = 0. \text{ L'insieme delle soluzioni è } S = \{0\}.$$

$$7) \quad 2^{x^2-x} = 4^{-x+3} \rightarrow 2^{x^2-x} = 2^{2(-x+3)} \rightarrow x^2 - x = -2x + 6 \rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

L'equazione di secondo grado ottenuta ammette come radici

$$x = \frac{-1 \pm 5}{2}, \text{ da cui } x_1 = -3, x_2 = 2. \text{ Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione esponenziale è } S = \{-3; 2\}.$$

$$8) \quad \frac{4^x}{2^{x^2-1}} = \frac{k}{8} \quad \text{Imponiamo che } x=-1 \text{ sia soluzione dell'equazione e risolviamo la corrispondente equazione nell'incognita } k.$$

$$\frac{4^{-1}}{2^{1-1}} = \frac{k}{8} \rightarrow k = 8 \cdot 4^{-1} = 2$$

Dunque deve essere $k=2$. L'equazione esponenziale di riferimento diventa

$$\frac{4^x}{2^{x^2-1}} = \frac{2}{8}, \text{ che si può ridurre alla forma } 2^{2x-x^2+1} = 2^{-2}, \text{ dalla quale si ha } x^2 - 2x - 3 = 0;$$

quest'equazione ammette come radici $x_1 = -1, x_2 = 3$. $S = \{-1; 3\}$.

$$9) \quad 2 \cdot 9^x - 5 \cdot 3^x + 2 = 0 \quad \text{Trasformiamo l'equazione come segue}$$

$$2 \cdot 3^{2x} - 5 \cdot 3^x + 2 = 0 \rightarrow 2 \cdot (3^x)^2 - 5 \cdot 3^x + 2 = 0$$

Poniamo $3^x = t$ e risolviamo la corrispondente equazione di secondo grado nell'incognita t .

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \rightarrow t = \frac{5 \pm 3}{4}, \text{ da cui } t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = 2. \text{ Tornando all'incognita } x \text{ si ha}$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \rightarrow 3^x = \frac{1}{2}, \text{ quindi } x = \log_3 \left(\frac{1}{2} \right) = -\log_3 2;$$

$$t_2 = 2 \rightarrow 3^x = 2, \text{ quindi } x = \log_3 2.$$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione esponenziale è $S = \{-\log_3 2; \log_3 2\}$.

$$10) 4^{\frac{1}{2x}} + 2^{\frac{1}{x}} = 1 \rightarrow (2^2)^{\frac{1}{2x}} + 2^{\frac{1}{x}} = 1 \rightarrow 2^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}} = 1 \rightarrow 2 \cdot 2^{\frac{1}{x}} = 1 \rightarrow 2^{1+\frac{1}{x}} = 1 \rightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \rightarrow x = -1.$$

Dunque l'insieme delle soluzioni è $S = \{-1\}$.