

Disequazioni logaritmiche¹

Ogni disequazione è seguita dall'indicatore Liv_x che ne indica il livello di difficoltà, con $1 \leq x \leq 5$; Liv_1 indica il livello di difficoltà più basso, Liv_5 indica il livello di difficoltà più alto.

1) $\log_4(2x-3) > \frac{1}{2}$ (Liv_1)

La disequazione si trasforma nell'equivalente

$$2x-3 > 4^{\frac{1}{2}}, \text{ soddisfatta per } x > \frac{5}{2}.$$

L'insieme delle soluzioni è $S = \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$.

2) $\log_{\frac{1}{2}}(2-3x) > -1$ (Liv_1)

La disequazione è equivalente alla doppia disuguaglianza

$$0 < 2-3x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}, \text{ dunque al sistema di disequazioni } \begin{cases} 2-3x > 0 \\ 2-3x < 2 \end{cases}, \text{ soddisfatto}$$

per $0 < x < \frac{2}{3}$. L'insieme delle soluzioni è $S = \left] 0; \frac{2}{3} \right[$

3) $\log_{\frac{3}{4}}(x+1) < -1$ (Liv_1)

La disequazione è equivalente alla disequazione $x+1 > \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$, verificata per

$$x > \frac{1}{3}. \text{ L'insieme delle soluzioni è } S = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[.$$

4) $\log_{\frac{4}{3}}(x^2+x) < -1$ (Liv_2)

La disequazione è equivalente alla doppia disuguaglianza $0 < x^2+x < \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$,

dunque l'insieme delle sue soluzioni coincide con quello del seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} x^2+x > 0 \\ x^2+x < \frac{3}{4} \end{cases}, \text{ che diventa } \begin{cases} x^2+x > 0 \\ 4x^2+4x-3 < 0 \end{cases}.$$

La prima disequazione è soddisfatta per $(x < -1) \vee (x > 0)$, la seconda è soddisfatta per

Nota_1) La disequazione $\log_a \varphi(x) > k$, con k reale, è equivalente
1.1) alla disequazione $\varphi(x) > a^k$ se $a > 1$,
1.2) alla doppia disuguaglianza $0 < \varphi(x) < a^k$ se $0 < a < 1$.

Nota_2) La disequazione $\log_a \varphi(x) < k$, con k reale, è equivalente
2.1) alla doppia disuguaglianza $0 < \varphi(x) < a^k$ se $a > 1$,
2.2) alla disuguaglianza $\varphi(x) > a^k$ se $0 < a < 1$.

¹ Si ricorda che i simboli $\log x$, $\log(x)$ indicano il logaritmo naturale del numero reale x e la base del logaritmo è il numero di Nepero $e=2,71828182845...$. Nella letteratura matematica il valore numerico logaritmo naturale di $x > 0$ è indicato anche con uno dei seguenti simboli $\ln x$, $\ln(x)$. Quando si considera il logaritmo di un numero reale positivo in una base diversa questa va espressamente indicata.

$-\frac{3}{2} < x < \frac{1}{2}$, quindi entrambe sono soddisfatte per

$$\left(-\frac{3}{2} < x < -1\right) \vee \left(0 < x < \frac{1}{2}\right).$$

Conclusion

L'insieme delle soluzioni della disequazione in oggetto è dunque

$$S = \left]-\frac{3}{2}; -1\right[\cup \left]0; \frac{1}{2}\right[$$

5) $2 \log(x-1) > \log(3-x)$ (Liv_2)

Ricerca del dominio di definizione della disequazione

La disequazione è definita per i valori della variabile x che verificano il seguente

sistema $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$, soddisfatto nell'intervallo $D =]1; 3[$.

Con $x \in D$ la disequazione si trasforma nella seguente

$$\log(x-1)^2 > \log(3-x), \text{ che a sua volta, considerato che la base dei logaritmi è}$$

il numero di Nepero $e=2,71828182845\dots$, si trasforma nell'equivalente

$$(x-1)^2 > 3-x, \text{ che si riduce alla seguente}$$

$$x^2 - x - 2 > 0. \text{ L'equazione associata ammette come radici } x = \frac{1 \pm 3}{2}, \text{ quindi}$$

$x_1 = -1, x_2 = 2$ e la disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo di dette radici: $(x < -1) \vee (x > 2)$.

Conclusion

Tenendo conto del dominio di definizione della disequazione si conclude che l'insieme delle soluzioni è $S =]2; 3[$.

6) $\log_3(16x+1) < \log_3(x+4) + 2$ (Liv_2)

Ricerca del dominio di definizione della disequazione

Osserviamo che la disequazione è definita nell'insieme delle soluzioni del

seguente sistema: $\begin{cases} 16x+1 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$, dunque nel dominio $D = \left]-\frac{1}{16}; +\infty\right[$.

Possiamo trasformare la disequazione come segue:

$$\log_3(16x+1) - \log_3(x+4) < 2, \text{ da cui } \log_3\left(\frac{16x+1}{x+4}\right) < 2, \text{ equivalente alla}$$

$$\text{doppia disuguaglianza } 0 < \frac{16x+1}{x+4} < 3^2, \text{ e perciò al sistema}$$

$$\begin{cases} \frac{16x+1}{x+4} > 0 \\ \frac{16x+1}{x+4} < 9 \end{cases}$$

La prima disequazione è ovviamente soddisfatta per ogni $x \in D$, in cui dobbiamo cercare le eventuali soluzioni. Basta pertanto risolvere la seconda disequazione e intersecare il suo insieme di soluzioni con D .

La disequazione $\frac{16x+1}{x+4} < 9$ può essere liberata dal denominatore perché con

Nota_3) La disequazione $\log_a \varphi(x) > \log_a g(x)$ è equivalente

3.1) al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \varphi(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases},$$

se $a > 1$,

3.2) al sistema

$$\begin{cases} \varphi(x) < g(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases},$$

se $0 < a < 1$.

Per la disequazione ridotta alla forma normale confrontare quanto riportato nella precedente Nota_2.

$x \in D$ risulta $x+4 > 0$, pertanto si perviene alla disequazione $16x+1 < 9(x+4)$, che ridotta è $7x < 35$ e che è soddisfatta per $x < 5$.

Conclusione

Tenendo conto del dominio di definizione la disequazione logaritmica è

soddisfatta nell'intervallo $S = \left] -\frac{1}{16}; 5 \right[$.

$$7) \log_2(10-x) + \log_2(x-2) > 4 \quad (\text{Liv}_2)$$

La disequazione è definita nell'insieme D delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 10-x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$,

dunque in $D =]2; 10[$. Tenendo presente la proprietà del prodotto di cui gode la funzione logaritmica, la disequazione si trasforma come segue

$\log_2(10-x)(x-2) > 4$, la quale, poiché la base del logaritmo è maggiore di uno è equivalente alla seguente disequazione

$$(10-x)(x-2) > 2^4$$

Riducendo alla forma normale si ottiene la disequazione

$x^2 - 12x + 36 < 0$, cioè $(x-6)^2 < 0$, che evidentemente non ha alcuna soluzione.

Conclusione: $S = \emptyset$.

$$8) \log(x^2+1) - \log(x^2-4) < \log 4 - \log(x+2) \quad (\text{Liv}_3)$$

Osservato che $x^2+1 > 0$ per ogni x reale, la disequazione è definita per i valori di x che verificano le due disuguaglianze $x^2-4 > 0$, $x+2 > 0$, che sono soddisfatte in $D =]2; +\infty[$.

Applicando la proprietà del quoziente la disequazione si trasforma come segue

$$\log\left(\frac{x^2+1}{x^2-4}\right) < \log\left(\frac{4}{x+2}\right).$$
 Ricordando che la funzione logaritmo ha come base

il numero di Nepero $e = 2,71828182845... > 1$ e quindi che è strettamente crescente, la disequazione in oggetto è equivalente al seguente sistema (vedere **Nota_4** a margine)

$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2-4} < \frac{4}{x+2} \\ \frac{x^2+1}{x^2-4} > 0 \end{cases}$$

A questo punto osserviamo che la seconda disequazione del sistema è senz'altro soddisfatta nel dominio $D =]2; +\infty[$, dunque basta risolvere la prima disequazione.

La disequazione in oggetto ha i due denominatori che nel dominio di definizione D sono positivi, quindi si può liberare dai denominatori scrivendola come segue

$$(x^2+1)(x-2) < 4(x^2-4), \text{ da cui } (x^2+1)(x-2) - 4(x^2-4) < 0,$$

e ancora

$$(x-2)(x^2-4x-7) < 0$$

Osserviamo ora che nel dominio di definizione $D =]2; +\infty[$ il fattore $(x-2)$ è strettamente positivo quindi la disequazione da studiare diventa semplicemente

$$x^2 - 4x - 7 < 0, \text{ soddisfatta per } 2 - \sqrt{11} < x < 2 + \sqrt{11}.$$

Conclusione

Ricordiamo che sussiste la proprietà (detta del **prodotto**)

$$\log_a(b \cdot c) =$$

$$\log_a b + \log_a c,$$

valida con

$$(a > 0) \wedge (a \neq 1) \text{ e}$$

per ogni $b > 0, c > 0$.

Ricordiamo che sussiste la proprietà (detta del **quoziente**)

$$\log_a(b : c) =$$

$$\log_a b - \log_a c \text{ valida con}$$

$$(a > 0) \wedge (a \neq 1) \text{ e}$$

per ogni $b > 0, c > 0$.

Nota_4) La

disequazione

$\log_a \varphi(x) < \log_a g(x)$ è equivalente

4.1) al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \varphi(x) < g(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases},$$

se $a > 1$,

4.2) al sistema

$$\begin{cases} \varphi(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases},$$

se $0 < a < 1$.

Tenendo conto che le soluzioni della disequazione di partenza devono essere un sottoinsieme del dominio di definizione D concludiamo che l'insieme delle soluzioni cercato è l'intervallo $S =]2; 2 + \sqrt{11}[$.

$$9) \log_5 \sqrt{x} \cdot (\log_5 x + 2) - \frac{1}{6} \log_5 x > \frac{1}{3} \quad (\text{Liv}_3)$$

Osserviamo che la disequazione è definita nel dominio $D =]0; +\infty[$.

Trasformiamo la disequazione applicando la proprietà della radice ed eseguiamo i prodotti.

$$\frac{1}{2} \log_5 x (\log_5 x + 2) - \frac{1}{6} \log_5 x > \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2} (\log_5 x)^2 + \log_5 x - \frac{1}{6} \log_5 x - \frac{1}{3} > 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} (\log_5 x)^2 + \frac{5}{6} \log_5 x - \frac{1}{3} > 0. \text{ Poniamo per brevità } \log_5 x = t; \text{ segue}$$

$$3t^2 + 5t - 2 > 0. \text{ Poiché l'equazione associata ammette come radici } t_1 = -2,$$

$$t_2 = \frac{1}{3}, \text{ la disequazione è soddisfatta per valori esterni all'intervallo determinato}$$

dalle stesse. Dunque, per $(t < -2) \vee (t > 1/3)$. Tornando alla variabile x deve risultare

$$(\log_5 x < -2) \vee \left(\log_5 x > \frac{1}{3} \right), \text{ da cui } (0 < x < 5^{-2}) \vee \left(x > 5^{\frac{1}{3}} \right), \text{ che scriviamo}$$

$$\text{nella forma equivalente } \left(0 < x < \frac{1}{25} \right) \vee \left(x > \sqrt[3]{5} \right).$$

Conclusione - L'insieme delle soluzioni della disequazione logaritmica è

$$S =]0; \frac{1}{25}[\cup]\sqrt[3]{5}; +\infty[.$$

$$10) \log_{\frac{1}{4}} x^2 + 2 \left(\log_{\frac{1}{4}} x \right)^3 < 0 \quad (\text{Liv}_3)$$

Il dominio di definizione della disequazione è $D =]0; +\infty[$. Con $x \in D$ trasformiamo la disequazione :

$$2 \log_{\frac{1}{4}} x + 2 \left(\log_{\frac{1}{4}} x \right)^3 < 0 \rightarrow \left(\log_{\frac{1}{4}} x \right)^3 + \log_{\frac{1}{4}} x < 0.$$

Ponendo per brevità di scrittura $\log_{\frac{1}{4}} x = t$ otteniamo la disequazione

$$t^3 + t < 0 \rightarrow t(t^2 + 1) < 0, \text{ equivalente alla disequazione } t < 0. \text{ Tornando alla}$$

variabile x , deve risultare $\log_{\frac{1}{4}} x < 0$, verificata per $x > 1$.

Conclusione

L'insieme delle soluzioni della disequazione logaritmica è $S =]1; +\infty[$.

$$11) \log_{x+1} (2|x| - 1) < -1 \quad (\text{Liv}_4)$$

Ricerca del dominio di definizione della disequazione

Per l'esistenza della disequazione devono essere soddisfatte le seguenti condizioni (C.d.E.)

$$\begin{cases} 2|x| - 1 > 0 \\ (x+1 > 0) \wedge x+1 \neq 1 \end{cases}, \text{ che sviluppate forniscono come dominio l'insieme}$$

Ricordiamo che sussiste la proprietà della radice

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b, \text{ con}$$

$(a > 0) \wedge (a \neq 1), b > 0$ e per ogni $n \neq 0$ reale.

$D = \left] -1; -\frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$. Risolviamo la disequazione in ciascuno dei due

intervalli $I_1 = \left] -1; -\frac{1}{2} \right[$, $I_2 = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

11.1) Con $x \in I_1$ la base del logaritmo risulta positiva e minore di 1 quindi la disequazione, la cui forma è

$\log_{x+1}(2(-x)-1) < -1$, si trasforma nella disequazione equivalente

$-2x-1 > (x+1)^{-1}$, da cui $-2x-1 > \frac{1}{x+1}$, e tenendo ancora presente che $x+1 > 0$

si può liberare dal denominatore ottenendo

$(-2x-1)(x+1) > 1 \rightarrow 2x^2 + 3x + 2 < 0$. La disequazione ottenuta, poiché il discriminante $\Delta = 9 - 16 = -7$ è negativo, non ammette soluzioni. Quindi in

$I_1 = \left] -1; -\frac{1}{2} \right[$ non vi sono soluzioni.

11.2) Con $x \in I_2$ la disequazione assume la seguente forma

$\log_{x+1}(2x-1) < -1$ e poiché la base del logaritmo è maggiore di 1 è equivalente

alla doppia disuguaglianza $0 < 2x-1 < (x+1)^{-1}$. Poiché nel dominio D è senz'altro soddisfatta la disuguaglianza $(0 < 2x-1)$ basta risolvere la seconda.

$2x-1 < (x+1)^{-1} \rightarrow 2x-1 < \frac{1}{x+1}$; poiché si sa che $x+1 > 0$ si può liberare la

disequazione dal denominatore e ridurre i termini simili. Si ottiene:

$(2x-1)(x+1) < 1 \rightarrow 2x^2 + x - 2 < 0$.

L'equazione di secondo grado associata $2x^2 + x - 2 = 0$ ammette come radici

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$ e la disequazione è soddisfatta per i valori reali interni

all'intervallo di dette radici: $-\frac{1+\sqrt{17}}{4} < x < \frac{\sqrt{17}-1}{4}$. Osservato che risulta

$-\frac{1+\sqrt{17}}{4} < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{17}-1}{4}$ concludiamo che l'insieme delle soluzioni della

disequazione relativamente all'intervallo I_2 è l'intervallo $\left] \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right[$.

Conclusion

L'insieme delle soluzioni della disequazione logaritmica nel suo dominio di

definizione è $S = \emptyset \cup \left] \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right[= \left] \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right[$