

Disequazioni logaritmiche¹

Ogni disequazione è seguita dall'indicatore **Liv_x** che ne indica il livello di difficoltà, con $1 \leq x \leq 5$; Liv_1 indica il livello di difficoltà più basso, Liv_5 indica il livello di difficoltà più alto.

1) $\log_4(2x-3) > \frac{1}{2}$	(Liv_1)	$S = \left] \frac{5}{2}; +\infty \right[$	Nota_1) La disequazione $\log_a \varphi(x) > k$, con k reale, è equivalente 1.1) alla disequazione $\varphi(x) > a^k$ se $a > 1$, 1.2) alla doppia disuguaglianza $0 < \varphi(x) < a^k$ se $0 < a < 1$.
2) $\log_{\frac{1}{2}}(2-3x) > -1$	(Liv_1)	$S = \left] 0; \frac{2}{3} \right[$	
3) $\log_{\frac{3}{4}}(x+1) < -1$	(Liv_1)	$S = \left] \frac{1}{3}; +\infty \right[$	Nota_2) La disequazione $\log_a \varphi(x) < k$, con k reale, è equivalente 2.1) alla doppia disuguaglianza $0 < \varphi(x) < a^k$ se $a > 1$, 2.2) alla disuguaglianza $\varphi(x) > a^k$ se $0 < a < 1$.
4) $\log_{\frac{4}{3}}(x^2+x) < -1$	(Liv_2)	$S = \left] -\frac{3}{2}; -1 \right[\cup \left] 0; \frac{1}{2} \right[$	
5) $2 \log(x-1) > \log(3-x)$	(Liv_2)	$S = \left] 2; 3 \right[$	Nota_3) La disequazione $\log_a \varphi(x) > \log_a g(x)$ è equivalente 3.1) al sistema di disequazioni $\begin{cases} \varphi(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$, se $a > 1$, 3.2) al sistema $\begin{cases} \varphi(x) < g(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$, se $0 < a < 1$.

¹ Si ricorda che i simboli $\log x$, $\log(x)$ indicano il logaritmo naturale del numero reale x e la base del logaritmo è il numero di Nepero $e=2,71828182845\dots$. Nella letteratura matematica il valore numerico logaritmo naturale di $x>0$ è indicato anche con uno dei seguenti simboli $\ln x$, $\ln(x)$. Quando si considera il logaritmo di un numero reale positivo in una base diversa questa va espressamente indicata.

6) $\log_3(16x+1) < \log_3(x+4) + 2$ (Liv_2)

$$S = \left] -\frac{1}{16}; 5 \right[.$$

Per la disequazione ridotta alla forma normale confrontare quanto riportato nella precedente Nota_2.

7) $\log_2(10-x) + \log_2(x-2) > 4$ (Liv_2)

$$S = \emptyset.$$

Ricordiamo che sussiste la proprietà (detta del **prodotto**)

$$\log_a(b \cdot c) =$$

$$\log_a b + \log_a c,$$

valida con

$$(a > 0) \wedge (a \neq 1) \text{ e}$$

per ogni $b > 0, c > 0$.

Ricordiamo che sussiste la proprietà (detta del **quoziente**)

$$\log_a(b : c) =$$

$$\log_a b - \log_a c \text{ valida con}$$

$$(a > 0) \wedge (a \neq 1) \text{ e}$$

per ogni $b > 0, c > 0$.

Nota_4) La

disequazione

$\log_a \varphi(x) < \log_a g(x)$ è equivalente

4.1) al sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \varphi(x) < g(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases},$$

se $a > 1$,

4.2) al sistema

$$\begin{cases} \varphi(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases},$$

se $0 < a < 1$.

Ricordiamo che sussiste la proprietà della radice

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b, \text{ con}$$

$(a > 0) \wedge (a \neq 1), b > 0$ e per ogni $n \neq 0$ reale.

8) $\log(x^2+1) - \log(x^2-4) < \log 4 - \log(x+2)$ (Liv_3)

$$S = \left] 2; 2 + \sqrt{11} \right[.$$

9) $\log_5 \sqrt{x} \cdot (\log_5 x + 2) - \frac{1}{6} \log_5 x > \frac{1}{3}$ (Liv_3)

$$S = \left] 0; \frac{1}{25} \right[\cup \left] \sqrt[3]{5}; +\infty \right[.$$

10) $\log_{\frac{1}{4}} x^2 + 2 \left(\log_{\frac{1}{4}} x \right)^3 < 0$ (Liv_3)

$$S = \left] 1; +\infty \right[.$$

11) $\log_{x+1}(2|x|-1) < -1$ (Liv_4)

$$S = \left] \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{17}-1}{4} \right[.$$