

Equazioni logaritmiche¹

Ogni equazione è seguita dall'indicatore Liv_x che ne indica il livello di difficoltà, con $1 \leq x \leq 5$; Liv_1 indica un livello di difficoltà basso, Liv_5 indica il livello di difficoltà più alto.

1) $\log 4 + \log x = \log 3$ (Liv_1) Osserviamo che l'equazione si può trasformare come segue $\log x = \log 3 - \log 4 \rightarrow \log x = \log \frac{3}{4}, \text{ da cui } x = \frac{3}{4}.$ L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \left\{ \frac{3}{4} \right\}$.	Ricordiamo che l'equazione $\log_a x = b$, con $(a > 0) \wedge (a \neq 1)$, per ogni numero reale b è soddisfatta dal valore reale $x = a^b$.
2) $\log x^2 = \log(5x - 6)$ (Liv_2) L'equazione logaritmica è equivalente al seguente sistema $\begin{cases} x^2 = 5x - 6 \\ x^2 > 0 \end{cases}.$ Risolvendo l'equazione di secondo grado che si ottiene $x^2 - 5x + 6 = 0$, si ricavano i due valori $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, che sono entrambi accettabili. L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{2; 3\}$.	Ricordiamo che l'equazione logaritmica $\log_a \varphi(x) = \log_a g(x)$, con $(a > 0) \wedge (a \neq 1)$ è equivalente ad uno dei due sistemi seguenti $\begin{cases} \varphi(x) = g(x) \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \varphi(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$
3) $2\log(x-1) = \log(3-x)$ (Liv_2) Ricerca del dominio di definizione dell'equazione L'equazione è definita per i valori della variabile x che verificano il seguente sistema $\begin{cases} x-1 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases}$, soddisfatto nel dominio $D =]1; 3[$. Con $x \in D$ l'equazione logaritmica si trasforma nella seguente $\log(x-1)^2 = \log(3-x)$, che a sua volta è equivalente (con $x \in D$) alla seguente equazione $(x-1)^2 = 3-x$, che si trasforma nella seguente $x^2 - x - 2 = 0$, le cui radici sono $x = \frac{1 \pm 3}{2}$, quindi $x_1 = -1$, $x_2 = 2$. Osserviamo che dei due valori ottenuti solo il maggiore appartiene al dominio D, quindi è accettabile come soluzione dell'equazione logaritmica in oggetto, mentre $x = -1$ va scartata. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{2\}$.	
4) $\log_3(16x+1) = \log_3(x+4) + 2$ (Liv_2) Ricerca del dominio di definizione dell'equazione Osserviamo che l'equazione è definita nell'insieme delle soluzioni del seguente	Ricordiamo che l'equazione $\log_a \varphi(x) = k$, con $(a > 0) \wedge (a \neq 1)$, per

¹ Si ricorda che i simboli $\log x$ o $\log(x)$ indicano il logaritmo naturale del numero reale x e la base del logaritmo è il numero di Neper $e=2,71828182845...$. Nella letteratura matematica il valore numerico logaritmo naturale è indicato anche con uno dei seguenti simboli $\ln x$ o $\ln(x)$. Quando si considererà il logaritmo di un numero reale positivo in una base diversa questa va espressamente indicata.

sistema: $\begin{cases} 16x+1 > 0 \\ x+4 > 0 \end{cases}$, dunque nel dominio $D = \left] -\frac{1}{16}; +\infty \right[$. Possiamo trasformare l'equazione come segue: $\log_3(16x+1) - \log_3(x+4) = 2$, da cui $\log_3\left(\frac{16x+1}{x+4}\right) = 2$, equivalente all'equazione $\frac{16x+1}{x+4} = 3^2$, che si riduce alle seguenti $16x+1 = 9x+36$, soddisfatta da $x = 5$. Poiché $5 \in D$ è accettabile come soluzione dell'equazione. $S = \{5\}$	ogni numero reale k è equivalente all'equazione $\varphi(x) = a^k$
5) $\log_2(x-10) + \log_2(2-x) = 5$ (Liv_2) L'equazione è definita per i valori di x che verificano il sistema di disequazioni $\begin{cases} x-10 > 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$. Poiché il sistema non ammette soluzioni l'equazione in esame non ha senso e dunque neanche soluzioni. $S = \emptyset$	
6) $\log_2(10-x) + \log_2(x-2) = 4$ (Liv_2) L'equazione è definita nell'insieme D delle soluzioni del sistema $\begin{cases} 10-x > 0 \\ x-2 > 0 \end{cases}$, dunque in $D =]2; 10[$. L'equazione si trasforma come segue $\log_2(10-x) + \log_2(x-2) = 4 \rightarrow \log_2(10-x) \cdot (x-2) = 4 \rightarrow (10-x) \cdot (x-2) = 2^4$, da cui $x^2 - 12x + 36 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 = 6$ L'equazione ammette la soluzione $x=6$. $S = \{6\}$	Ricordiamo che sussiste la proprietà (detta del prodotto) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, valida con $(a > 0) \wedge (a \neq 1)$ e per ogni $b > 0, c > 0$.
7) $\log(x^2+1) - \log(x^2-4) = \log 4 - \log(x+2)$ (Liv_3) L'equazione è definita per i valori di x che verificano le due disuguaglianze $x^2-4 > 0, x+2 > 0$, che sono soddisfatte in $D =]2; +\infty[$. Applicando la proprietà del quoziente l'equazione si trasforma come segue $\log\left(\frac{x^2+1}{x^2-4}\right) = \log\left(\frac{4}{x+2}\right)$, da cui, uguagliando i due argomenti della funzione logaritmo, $\frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{4}{x+2} \rightarrow x^2 - 4x - 7 = 0$. Le radici dell'equazione di secondo grado ottenuta sono $x = 2 \pm \sqrt{11}$; dei due valori è accettabile solo quello positivo: $x = 2 + \sqrt{11}$ perché appartiene al dominio D. Si conclude che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è: $S = \{2 + \sqrt{11}\}$.	Ricordiamo che sussiste la proprietà (detta del quoziente) $\log_a(b:c) = \log_a b - \log_a c$ valida con $(a > 0) \wedge (a \neq 1)$ e per ogni $b > 0, c > 0$
8) $\log_5 \sqrt{x} \cdot (\log_5 x + 2) - \frac{1}{6} \log_5 x = \frac{1}{3}$ (Liv_3) Osserviamo che l'equazione è definita nel dominio $D =]0; +\infty[$. Trasformiamo l'equazione applicando la proprietà della radice ed eseguiamo i prodotti. $\frac{1}{2} \log_5 x (\log_5 x + 2) - \frac{1}{6} \log_5 x = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2} (\log_5 x)^2 + \log_5 x - \frac{1}{6} \log_5 x - \frac{1}{3} = 0$	Ricordiamo che sussiste la proprietà della radice $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$, con $(a > 0) \wedge (a \neq 1)$, $b > 0$ e per ogni $n \neq 0$ reale.

$\rightarrow \frac{1}{2}(\log_5 x)^2 + \frac{5}{6}\log_5 x - \frac{1}{3} = 0$. Poniamo $\log_5 x = t$; segue $3t^2 + 5t - 2 = 0$, da cui $t = \frac{-5 \pm 7}{6}$, quindi $t_1 = -2$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Tornando alla variabile x otteniamo $t_1 = -2 \rightarrow \log_5 x = -2 \rightarrow x = 5^{-2}$; $t_2 = \frac{1}{3} \rightarrow \log_5 x = \frac{1}{3} \rightarrow x = \sqrt[3]{5}$ I due valori trovati sono positivi, quindi accettabili. L'insieme delle soluzioni dell'equazione logaritmica è $S = \left\{ \frac{1}{25}; \sqrt[3]{5} \right\}$.	
9) $\log_4 x^2 + 2(\log_4 x)^3 = 0$ (Liv_3) Il dominio di definizione dell'equazione è $D =]0; +\infty[$. Con $x \in D$ trasformiamo l'equazione : $2\log_4 x + 2(\log_4 x)^3 = 0 \rightarrow (\log_4 x)^3 + \log_4 x = 0$. Ponendo $\log_4 x = t$ otteniamo l'equazione $t^3 + t = 0 \rightarrow t(t^2 + 1) = 0$, che ammette la sola radice reale $t = 0$. Tornando alla variabile x, deve risultare $\log_4 x = 0$, da cui $x = 4^0 = 1$. Si conclude che l'insieme delle soluzioni dell'equazione logaritmica è $S = \{1\}$.	
10) Tenendo presente il lavoro svolto nella risoluzione della precedente equazione provare che l'insieme delle soluzioni dell'equazione $\log_4 x^2 - 2(\log_4 x)^3 = 0$ è $S = \left\{ \frac{1}{4}; 1; 4 \right\}$.	