

Disequazioni esponenziali

- | | |
|---|--|
| 1) $(2^{x+4})^2 \cdot 3^{x-1} \geq \frac{32}{3^{x+4}}$ | $S = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ |
| 2) $(x+1)^x \cdot \sqrt{9 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+2} + 27} > 0$ | $S =]-1; 0[\cup]1; +\infty[$ |
| 3) $\frac{4 \cdot 2^{x-1} - 1}{3^x - 9} < 0$ | $S =]-1; 2[$ |
| 4) $4 \cdot 5^x - 80 > \sqrt{5^{2x} - 9 \cdot 5^x}$ | $S =]2; +\infty[$ |
| 5) $\sqrt{2(3^x - 1)} \geq 3^x - 1$ | $S = [0; 1]$ |

Risoluzione

1) $(2^{x+4})^2 \cdot 3^{x-1} \geq \frac{32}{3^{x+4}} \rightarrow 2^{2(x+4)} \cdot 3^{x-1} \geq \frac{2^5}{3^{x+4}} \rightarrow \frac{2^{2x+8}}{2^5} \geq \frac{1}{3^{x-1} \cdot 3^{x+4}} \rightarrow 2^{2x+8-5} \geq \frac{1}{3^{2x+3}} \rightarrow$
 $2^{2x+3} \cdot 3^{2x+3} \geq 1 \rightarrow 6^{2x+3} \geq 1 \rightarrow 2x+3 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è $S = \left[-\frac{3}{2}; +\infty\right[$

2) $(x+1)^x \cdot \sqrt{9 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+2} + 27} > 0$

La disequazione ha senso per i valori di x che verificano le seguenti condizioni:

2.1) $x+1 > 0$, **2.2)** $9 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+2} + 27 \geq 0$

Dalla prima si ricava la limitazione $x > -1$. Elaboriamo la seconda.

$$9 \cdot (3^x)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 3^x + 27 \geq 0 \rightarrow (3^x)^2 - 4 \cdot 3^x + 3 \geq 0.$$

Ponendo $3^x = t$ si passa alla disequazione di secondo grado

$t^2 - 4t + 3 \geq 0$, soddisfatta dai valori di t tali che $(t \leq 1) \vee (t \geq 3)$, dunque per i valori di x tali che

$(3^x \leq 1) \vee (3^x \geq 3)$, cioè dai valori $(x \leq 0) \vee (x \geq 1)$.

Mettendo insieme le due condizioni deduciamo che il dominio di definizione della disequazione in esame è l'insieme $D =]-1; 0] \cup [1; +\infty[$.

A questo punto osserviamo che nel dominio D il primo fattore è positivo mentre in secondo fattore è non negativo, annullandosi per $x=0$ e $x=1$. Escludendo questi ultimi due valori da D, perché il primo membro deve essere strettamente positivo, si ottiene l'insieme delle soluzioni della disequazione. Perciò risulta

$$S = D - \{0;1\} =]-1;0[\cup]1;+\infty[$$

$$3) \frac{4 \cdot 2^{x-1} - 1}{3^x - 9} < 0 \rightarrow \frac{2^{x-1+2} - 1}{3^x - 3^2} < 0 \rightarrow \frac{2^{x+1} - 1}{3^x - 3^2} < 0$$

Studiamo i segni del numeratore e del denominatore e confrontiamo i risultati.

$$N(x) = 2^{x+1} - 1 > 0, \text{ da cui } 2^{x+1} > 1, \text{ soddisfatta dai valori reali } x > -1;$$

$$D(x) = 3^x - 3^2 > 0, \text{ che diventa } 3^x > 3^2, \text{ quindi deve essere } x > 2.$$

Osserviamo che i valori di x che soddisfano la disequazione sono quelli per i quali sono discordi il numeratore e il denominatore e ciò si verifica solo per $-1 < x < 2$. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S =]-1;2[$.

$$4) 4 \cdot 5^x - 80 > \sqrt{5^{2x} - 9 \cdot 5^x} \text{ Il dominio di definizione della disequazione è costituito dai valori di x che soddisfano il seguente sistema}$$

$$\begin{cases} 5^{2x} - 9 \cdot 5^x \geq 0 \\ 4 \cdot 5^x - 80 > 0 \end{cases}, \text{ che si riconduce al seguente } \begin{cases} 5^x - 9 \geq 0 \\ 5^x - 20 > 0 \end{cases}, \text{ soddisfatto per } x > \log_5 20.$$

$$\text{Dunque il dominio di definizione è } D =]\log_5 20; +\infty[.$$

Operando nel dominio D si elevano i due membri della disequazione al quadrato e si procede.

$$(4 \cdot 5^x - 80)^2 > (\sqrt{5^{2x} - 9 \cdot 5^x})^2 \rightarrow 16 \cdot 5^{2x} - 640 \cdot 5^x + 6400 > 5^{2x} - 9 \cdot 5^x \rightarrow$$

$$15 \cdot (5^x)^2 - 631 \cdot 5^x + 6400 > 0. \text{ Con } 5^x = t \text{ si affronta la disequazione}$$

$15 \cdot t^2 - 631 \cdot t + 6400 > 0$, il cui discriminante è $\Delta = 14161 = 119^2$ e le radici dell'equazione associata sono:

$$t = \frac{631 \pm 119}{30}, \text{ da cui } t_1 = \frac{256}{15}, t_2 = 25.$$

$$\text{La disequazione di secondo grado è soddisfatta dai valori di t tali che } \left(t < \frac{256}{15}\right) \vee (t > 25) \text{ e}$$

dunque, tornando all'incognita x deve risultare

$$\left(5^x < \frac{256}{15}\right) \vee (5^x > 25).$$

Osserviamo che $\frac{256}{15} < 20$, mentre per le C.d. E. deve aversi $5^x > 20$ pertanto si deduce che le

soluzioni reali della disequazione sono i valori x tali che risulti $5^x > 25$, quindi $x > 2$.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S =]2; +\infty[$.

5) $\sqrt{2(3^x - 1)} \geq 3^x - 1$

Osserviamo che per l'esistenza della disequazione deve essere soddisfatta la disuguaglianza $3^x - 1 \geq 0$, dunque deve essere $x \geq 0$. Con la condizione indicata riduciamo la disequazione alla forma

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3^x - 1} \geq 3^x - 1$$

Ponendo $\sqrt{3^x - 1} = t$ si ottiene la disequazione

$\sqrt{2}t \geq t^2$, da cui $t(t - \sqrt{2}) \leq 0$, che è soddisfatta per $0 \leq t \leq \sqrt{2}$. Ritornando all'incognita x si ha

$0 \leq \sqrt{3^x - 1} \leq \sqrt{2}$, quindi x deve verificare il seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3^x - 1} \geq 0 \\ \sqrt{3^x - 1} \leq \sqrt{2} \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} x \geq 0 \\ 3^x - 1 \leq 2 \end{cases}, \text{ quindi } \begin{cases} x \geq 0 \\ 3^x \leq 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni del sistema, e quindi della disequazione in esame, è $S = [0; 1]$.