

Equazioni esponenziali

- | | |
|---|-------------------------------------|
| 1) $7^{1-2x} = 49$ | $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ |
| 2) $\frac{1}{2} \cdot 4^{3+x} = \frac{8}{2^{2-3x}}$ | $S = \{4\}$ |
| 3) $2^x \cdot 4^x + 8^x = 32$ | $S = \left\{\frac{4}{3}\right\}$ |
| 4) $5^x \cdot 25^{\frac{1}{x-1}} = 625$ | $S = \{2; 3\}$ |
| 5) $3^{2x+2} - 3^{x+2} \cdot 4^x - 4^{2x+1} = 0$ | $S = \{-1\}$ |
| 6) $0,4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{25}\right)^x = 0$ | $S = \{1\}$ |
| 7) $8 \cdot 2^{2x} = \frac{1}{3^{2x+3}}$ | $S = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ |
| 8) $\frac{4^{-x}}{8^{2x}} = \frac{16^{3-x}}{2}$ | $S = \left\{-\frac{11}{4}\right\}$ |
| 9) $10^{\frac{3x+1}{x+1}} = 100^{\frac{x^2-x}{x-1}}$ | $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ |
| 10) $\sqrt[2x]{6^{x+1}} = \sqrt[x+1]{36^{2-x}}$ | $S = \left\{\frac{1}{5}; 1\right\}$ |

Risoluzione

- 1) $7^{1-2x} = 49 \rightarrow 7^{1-2x} = 7^2 \rightarrow 1-2x = 2 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$
- 2) $\frac{1}{2} \cdot 4^{3+x} = \frac{8}{2^{2-3x}} \rightarrow 2^{-1} \cdot (2^2)^{3+x} = 2^{-2+3x} \cdot 2^3 \rightarrow 2^{5+2x} = 2^{3x+1} \rightarrow 5+2x = 3x+1 \rightarrow x = 4$
- 3) $2^x \cdot 4^x + 8^x = 32 \rightarrow 8^x + 8^x = 32 \rightarrow 2 \cdot 8^x = 32 \rightarrow 8^x = 16 \rightarrow (2^3)^x = 2^4 \rightarrow 3x = 4 \rightarrow x = \frac{4}{3}$
- 4) $5^x \cdot 25^{\frac{1}{x-1}} = 625 \rightarrow 5^x \cdot 5^{\frac{2}{x-1}} = 5^4 \rightarrow 5^{x+\frac{2}{x-1}} = 5^4 \rightarrow x + \frac{2}{x-1} = 4 \rightarrow \frac{x(x-1)+2-4(x-1)}{x-1} = 0$

Con la condizione $x \neq 1$ si passa all'equazione di secondo grado

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x_2^1 = \frac{5 \pm 1}{2}, \text{ da cui si ricavano le radici } x_1 = 2, x_2 = 3, \text{ entrambe accettabili}$$

come soluzioni dell'equazione di partenza.

5) $3^{2x+2} - 3^{x+2} \cdot 4^x - 4^{2x+1} = 0 \rightarrow 9 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 3^x \cdot 4^x - 4 \cdot 4^{2x} = 0$

Dividiamo entrambi i membri dell'equazione per 4^{2x} e semplifichiamo:

$$9 \cdot \frac{3^{2x}}{4^{2x}} - 9 \cdot 3^x \cdot \frac{4^x}{4^{2x}} - 4 = 0 \rightarrow 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{2x} - 9 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x - 4 = 0. \text{ Poniamo } \left(\frac{3}{4}\right)^x = t > 0 \text{ e procediamo.}$$

$$9t^2 - 9t - 4 = 0 \rightarrow t_2 = \frac{9 \pm 15}{18} \rightarrow t_1 = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3} < 0, \text{ valore non accettabile; } t_2 = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}.$$

Dal valore t_2 , ritornando all'incognita x , otteniamo

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4}{3}, \text{ che può essere scritta nella forma } \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-1}, \text{ da cui } x = -1.$$

$$6) \quad 0,4 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{4}{25}\right)^x = 0 \rightarrow \frac{4}{10} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x - \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} = 0 \rightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2x} \rightarrow x+1 = 2x \rightarrow x = 1$$

$$7) \quad 8 \cdot 2^{2x} = \frac{1}{3^{2x+3}} \rightarrow 2^{3+2x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x+3} \quad \text{l'uguaglianza sussiste solo se l'esponente è nullo:}$$

$$2x+3=0, \text{ da cui } x = -\frac{3}{2}.$$

$$8) \quad \frac{4^{-x}}{8^{2x}} = \frac{16^{3-x}}{2} \rightarrow \frac{2^{-2x}}{(2^3)^{2x}} = \frac{(2^4)^{3-x}}{2} \rightarrow 2^{-2x-6x} = 2^{12-4x-1} \rightarrow -8x = 11-4x \rightarrow x = -\frac{11}{4}$$

$$9) \quad 10^{\frac{3x+1}{x+1}} = 100^{\frac{x^2-x}{x-1}} \rightarrow 10^{\frac{3x+1}{x+1}} = 10^{\frac{2x(x-1)}{x-1}}, \text{ con } x \neq 1 \text{ l'equazione diventa } 10^{\frac{3x+1}{x+1}} = 10^{2x}, \text{ da cui, uguagliando gli esponenti,}$$

$$\frac{3x+1}{x+1} = 2x, \text{ che con l'ulteriore condizione } x \neq -1 \text{ diventa}$$

$$2x^2 - x - 1 = 0.$$

L'equazione è soddisfatta da $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$. Per quanto detto in precedenza si accetta solo

$$x_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$10) \quad \sqrt[2x]{6^{x+1}} = \sqrt[3]{36^{2-x}} \rightarrow 6^{\frac{x+1}{2x}} = 36^{\frac{2-x}{x+1}} \rightarrow 6^{\frac{x+1}{2x}} = 6^{\frac{2(2-x)}{x+1}} \rightarrow \frac{x+1}{2x} = \frac{2(2-x)}{x+1}$$

Con $x \neq 0$ e $x \neq -1$ si passa all'equazione

$(x+1)^2 = 4x(2-x)$, da cui $5x^2 - 6x + 1 = 0$; l'equazione è soddisfatta da $x_1 = \frac{1}{5}$ e $x_2 = 1$ ed entrambi i valori sono accettabili.