

Esercizi sulle equazioni irrazionali intere

- | | |
|----------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sqrt{4-2x^2} = 2-x$ | $S = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}$ |
| 2) $\sqrt{4-x^2} = x-2$ | $S = \{2\}$ |
| 3) $\sqrt{3x^2-2} = x$ | $S = \{1\}$ |
| 4) $\sqrt{x^2-3x} = 3x+1$ | $S = \left\{-\frac{1}{8}\right\}$ |
| 5) $x - \sqrt{4x^2+9} = 7$ | $S = \emptyset$ |

Elaborazioni

1) $\sqrt{4-2x^2} = 2-x$

L'equazione ha senso se sono soddisfatte le seguenti condizioni di esistenza (C.d.E.)

$$\begin{cases} 4-2x^2 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}, \text{ soddisfatte nel dominio } D = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

Con $x \in D$ l'equazione si può trasformare elevando i due membri al quadrato e riducendo i termini simili. Si ha

$$\left(\sqrt{4-2x^2}\right)^2 = (2-x)^2, \text{ da cui } 3x^2 - 4x = 0.$$

L'equazione ottenuta ammette come soluzioni $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{4}{3}$; entrambi i valori appartengono al dominio D , quindi sono accettabili. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è

$$S = \left\{0; \frac{4}{3}\right\}.$$

2) $\sqrt{4-x^2} = x-2$

L'equazione è definita per valori di x che soddisfano le seguenti condizioni (C.d.E.)

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Entrambe le condizioni sono soddisfatte nell'insieme } D = \{2\}.$$

Osserviamo che $x=2$ verifica l'equazione e dunque non è necessario eseguire altre elaborazioni algebriche per concludere che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = D = \{2\}$.

3) $\sqrt{3x^2-2} = x$

Le C.d.E. per l'equazione sono

$$\begin{cases} 3x^2 - 2 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{Il sistema è soddisfatto nell'intervallo } D = \left[\sqrt{\frac{2}{3}}; +\infty \right[.$$

Elevando al quadrato i due membri e riducendo i termini simili si ha

$$\left(\sqrt{3x^2 - 2} \right)^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 2 = 0 \quad \text{L'equazione ammette come radici } x_1 = -1, x_2 = 1, \text{ delle}$$

quali solo la positiva appartiene al dominio di definizione D e quindi è accettabile come soluzione dell'equazione in esame; la radice negativa va scartata. Si conclude che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{1\}$.

4) $\sqrt{x^2 - 3x} = 3x + 1$

Il dominio di definizione dell'equazione è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema (C.d.E.)

$$\begin{cases} x^2 - 3x \geq 0 \\ 3x + 1 \geq 0 \end{cases} \quad \text{Il sistema è soddisfatto nell'insieme } D = \left[-\frac{1}{3}; 0 \right] \cup [3; +\infty[.$$

Con $x \in D$ si possono elevare i due membri al quadrato e ridurre i termini simili. Si ha:

$$\left(\sqrt{x^2 - 3x} \right)^2 = (3x + 1)^2, \text{ da cui } 8x^2 + 9x + 1 = 0$$

Per l'equazione ottenuta si ha

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 32}}{16} = \frac{-9 \pm 7}{16}, \text{ da cui } x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{8}; \text{ dei due valori ottenuti solo il maggiore}$$

appartiene al dominio D, quindi l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \left\{ -\frac{1}{8} \right\}$.

5) $x - \sqrt{4x^2 + 9} = 7$

Scritta l'equazione nella forma equivalente

$$\sqrt{4x^2 + 9} = x - 7, \text{ si riconosce che il suo dominio di definizione è l'intervallo } D = [7; +\infty[.$$

Elevando al quadrato ambo i membri e riducendo i termini simili si perviene all'equazione

$$3x^2 + 14x - 40 = 0, \text{ le cui radici sono } x_1 = -\frac{20}{3}, x_2 = 2; \text{ poiché nessuno dei due valori appartiene}$$

al dominio D si conclude che l'equazione non ha soluzioni, quindi $S = \emptyset$.