

Esercizi sulle equazioni irrazionali fratte

- | | |
|---|---------------|
| 1) $\frac{x+1-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=0$ | $S=\emptyset$ |
| 2) $\frac{x+1-2\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}}=0$ | $S=\{1\}$ |
| 3) $\frac{x+2-3\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}=0$ | $S=\{4\}$ |
| 4) $\frac{\sqrt{3x+1}-x+1}{2-\sqrt{3-x}}=0$ | $S=\emptyset$ |
| 5) $\frac{2\sqrt{x+1}-x+2}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+3}}=0$ | $S=\{0\}$ |
| 6) $\frac{3-x-\sqrt{x^2+15}}{x-\sqrt{1-x}}=0$ | $S=\{-1\}$ |
| 7) $\frac{1}{2-\sqrt{2x-3}}-\frac{3}{\sqrt{x-1}+2}=0$ | $S=\{2\}$ |
| 8) $\frac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\frac{3}{x}=0$ | $S=\{3\}$ |

$$1) \frac{x+1-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = 0$$

L'equazione ha come dominio di definizione l'insieme delle soluzioni del seguente sistema (C.d.E.)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 3-\sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \quad \text{Il sistema si trasforma nel seguente } \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 9 \end{cases}, \text{ quindi il dominio di definizione}$$

dell'equazione è $D = [0; 9[\cup]9; +\infty[$.

Le eventuali soluzioni dell'equazione vanno ricercate in D. Una frazione si annulla se e solo se il suo numeratore è uguale a zero ed il suo denominatore è diverso da zero; deve pertanto risultare

$x+1-\sqrt{x}=0$, da cui $x+1=\sqrt{x}$, che in D si può trasformare elevando al quadrato i due membri e riducendo i termini simili.

$$(x+1)^2 = (\sqrt{x})^2 \rightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

L'equazione ottenuta ha come discriminante $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$, quindi non ammette radici reali.

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione fratta in esame è vuoto: $S = \emptyset$.

$$2) \frac{x+1-2\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} = 0$$

L'equazione ammette come dominio di definizione $D = [0; 9[\cup]9; +\infty[$ (confrontare il precedente esercizio).

Uguagliando a zero il numeratore ed elaborando l'equazione ottenuta si ha

$$x+1-2\sqrt{x}=0 \rightarrow x+1=2\sqrt{x} \rightarrow$$

$$(x+1)^2 = (2\sqrt{x})^2 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow (x-1)^2 = 0$$

L'equazione ammette due soluzioni coincidenti

$x_1 = x_2 = 1$. Poiché il valore trovato appartiene al dominio D si conclude che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{1\}$.

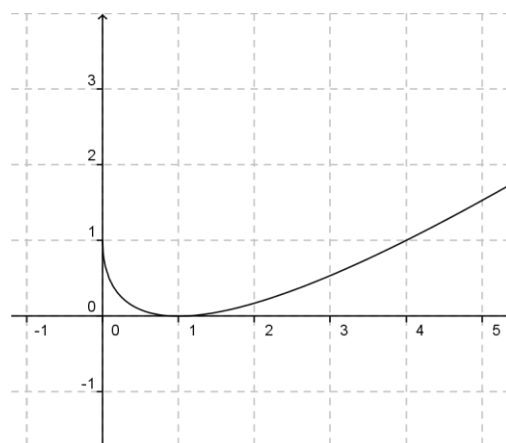


Figura 1- La curva è tangente all'asse delle ascisse nel punto $x=1$.

Approfondimento

Il fatto che il valore $x=1$ sia **radice doppia** dell'equazione ha un'interpretazione geometrica interessante. Rappresentando il diagramma della funzione $y = x + 1 - 2\sqrt{x}$ si riscontra che nel punto $x=1$ la curva è tangente all'asse delle ascisse; si esprime questa proprietà affermando che la

curva e l'asse delle ascisse hanno nel punto (1;0) un contatto che assorbe due punti (coincidenti) in comune.

$$3) \frac{x+2-3\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}} = 0$$

L'equazione ha come dominio di definizione l'insieme delle soluzioni del seguente sistema (C.d.E.)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} \neq 0 \end{cases}, \text{ che si trasforma nel seguente } \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) \neq 0 \end{cases}, \text{ soddisfatto in } D =]0;1[\cup]1;+\infty[.$$

Con $x \in D$, annulliamo il numeratore della frazione e risolviamo la corrispondente equazione.

$x+2-3\sqrt{x}=0$, da cui $x+2=3\sqrt{x}$, eleviamo al quadrato i due membri e semplifichiamo l'espressione

$$(x+2)^2 = (3\sqrt{x})^2 \rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

L'equazione ottenuta ammette come radici $x_1=1$, $x_2=4$; il primo valore si scarta perché non appartiene al dominio D , mentre si accetta il secondo. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è $S = \{4\}$.

$$4) \frac{\sqrt{3x+1}-x+1}{2-\sqrt{3-x}} = 0$$

L'equazione ha come dominio di definizione l'insieme delle soluzioni del seguente sistema (C.d.E.)

$$\begin{cases} 3x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 2-\sqrt{3-x} \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq 3 \\ \sqrt{3-x} \neq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leq x \leq 3 \\ x \neq -1 \end{cases}, \text{ quindi } D = \left[-\frac{1}{3}; 3\right].$$

Con $x \in D$ annulliamo il numeratore della frazione e risolviamo la corrispondente equazione.

$$\sqrt{3x+1}-x+1=0 \rightarrow \sqrt{3x+1}=x-1$$

L'equazione ottenuta ha senso con l'aggiunta del ulteriore condizione $x-1 \geq 0$, quindi l'insieme in cui cercare le eventuali radici dell'equazione diventa $D' = D \cap [1; +\infty[= [1; 3]$.

Con $x \in D'$ eleviamo al quadrato i due membri e proseguiamo.

$$(\sqrt{3x+1})^2 = (x-1)^2 \rightarrow x^2 - 5x = 0 \quad \text{l'equazione ammette come radici } x_1 = 0, x_2 = 5. \text{ Poiché}$$

nessuna delle due appartiene al dominio D' vanno scartate e dunque l'equazione di partenza non ammette soluzioni. $S = \emptyset$

$$5) \frac{2\sqrt{x+1}-x+2}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x+3}}=0$$

L'equazione è definita per i valori dell'incognita x che verificano il seguente sistema (C.d.E.)

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \\ x+3 \geq 0 \\ \sqrt{4-x}-\sqrt{x+3} \neq 0 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{4-x} \neq \sqrt{x+3} \end{cases}, \text{ quindi } \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Il dominio di definizione dell'equazione è pertanto $D = [-1; 4] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Con $x \in D$ annulliamo il numeratore della frazione e risolviamo la corrispondente equazione.

$$2\sqrt{x+1}-x+2=0, \text{ da cui } 2\sqrt{x+1}=x-2$$

La sussistenza di quest'equazione richiede l'ulteriore limitazione $x-2 \geq 0$; pertanto il dominio di ricerca diventa l'insieme

$$D' = [2; 4] - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

Eleviamo al quadrato i due membri dell'equazione e semplifichiamo.

$$(2\sqrt{x+1})^2 = (x-2)^2 \text{ da cui } x^2 - 8x = 0$$

L'equazione ammette come radici $x_1 = 0, x_2 = 8$ nessuna delle quali è accettabile come soluzione perché non appartengono al dominio D' . Concludiamo che l'equazione in esame non ha soluzioni. $S = \emptyset$.

$$6) \frac{3-x-\sqrt{x^2+15}}{x-\sqrt{1-x}}=0$$

Il dominio di definizione dell'equazione è l'insieme delle soluzioni del seguente sistema (C.d.E.)

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x-\sqrt{1-x} \neq 0 \end{cases} \text{ che scriviamo nella forma } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq \sqrt{1-x} \end{cases} \text{ da cui } \begin{cases} x \leq 1 \\ x \neq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}. \text{ Il dominio di}$$

$$\text{definizione dell'equazione è } D =]-\infty; 1] - \left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$$

Con $x \in D$ annulliamo il numeratore della frazione e proseguiamo.

$$3-x-\sqrt{x^2+15}=0, \text{ da cui } 3-x=\sqrt{x^2+15}$$

Osserviamo che per la sussistenza dell'equazione ottenuta è necessaria la condizione ulteriore $3-x \geq 0$, cioè $x \leq 3$, che è senz'altro verificata nel dominio D. Eleviamo al quadrato i due membri.

$$(3-x)^2 = (\sqrt{x^2+15})^2 \rightarrow 9-6x+x^2 = x^2+15 \rightarrow x = -1$$

Il valore trovato appartiene al dominio di definizione dell'equazione di partenza, quindi è accettabile come soluzione. $S = \{-1\}$

$$7) \quad \frac{1}{2-\sqrt{2x-3}} - \frac{3}{\sqrt{x-1}+2} = 0$$

Dominio di definizione dell'equazione (C.d.E.)

L'equazione ha senso per i valori di x che verificano il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2-\sqrt{2x-3} \neq 0 \end{cases}, \text{ che diventa } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ x \neq \frac{7}{2} \end{cases}; \text{ il dominio di definizione è dunque } D = \left[\frac{3}{2}; +\infty \right[- \left\{ \frac{7}{2} \right\}.$$

Con $x \in D$ riduciamo il primo membro ad una sola frazione ed uguagliamo a zero il numeratore.

$$\frac{\sqrt{x-1}+2-3(2-\sqrt{2x-3})}{(2-\sqrt{2x-3})(\sqrt{x-1}+2)} = 0 \rightarrow \frac{\sqrt{x-1}+3\sqrt{2x-3}-4}{(2-\sqrt{2x-3})(\sqrt{x-1}+2)} = 0$$

Si deve risolvere l'equazione

$$\sqrt{x-1}+3\sqrt{2x-3}-4=0, \text{ che diventa } \sqrt{x-1}+3\sqrt{2x-3}=4$$

Elevando i due membri al quadrato, riducendo i termini simili ed isolando la parte contenente i radicali si perviene alla seguente equazione

$$6\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-3} = 44-19x$$

Il primo membro dell'equazione è non negativo e quindi le eventuali soluzioni devono rendere non negativo anche il secondo membro: $44-19x \geq 0$; dunque $x \leq \frac{44}{19}$. Osservato che $\frac{44}{19} < \frac{7}{2}$, il dominio

di ricerca delle eventuali soluzioni dell'equazione in esame diventa $D' = \left[\frac{3}{2}; \frac{44}{19} \right]$. Elevando ancora al quadrato i due membri e riducendo i termini simili si perviene all'equazione

$$289x^2 - 1492x + 1828 = 0 \text{ per la quale si ha } \frac{\Delta}{4} = 168^2; \text{ le radici sono}$$

$$x_1 = \frac{746-168}{289} = 2; \quad x_2 = \frac{746+168}{289} = \frac{914}{289}$$

Si osserva che $x_1 = 2 \in D'$, quindi è accettabile, mentre $x_2 = \frac{914}{289} \approx 3,16 > \frac{44}{19}$, non è accettabile.

In conclusione l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è $S = \{2\}$.

$$8) \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{3}{x} = 0$$

L'equazione è definita nel dominio D delle soluzioni del seguente sistema (C.d.E.)

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ \sqrt{x+1}-1 \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{si ha } D = [-1; 0[\cup]0; +\infty[.$$

Riduciamo il primo membro ad una sola frazione.

$$\frac{x+3-3\sqrt{x+1}}{x(\sqrt{x+1}-1)} = 0 \quad \text{Uguagliamo a zero il numeratore}$$

$$x+3-3\sqrt{x+1} = 0, \text{ da cui } x+3 = 3\sqrt{x+1}.$$

Con $x \in D$ risulta anche $x+3 > 0$, quindi si possono elevare i due membri al quadrato e ridurre i termini simili.

$(x+3)^2 = (3\sqrt{x+1})^2$ da cui $x^2 - 3x = 0$, che ammette come radici $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, delle quali è accettabile solo $x_2 = 3$. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è $S = \{3\}$.