Esercizi sulle disequazioni esponenziali

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{4}{27}\right)^{\frac{x-1}{x}}$ $\quad S = \left]-\infty; 0\right[\cup \left[1; \frac{\ln 27 - \ln 4}{\ln 4 - \ln 3}\right]$

2) $2^{\sqrt{\frac{1}{x}}} > 4^{\sqrt{x-1}}$ $\quad S = \left[1; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$

3) $e^{-x} - 3 > -\frac{4}{e^{-x}+2}$ $\quad S = \left]-\infty; -\ln 2\right[$

4) $e\sqrt{e^x} + \left(\sqrt{e}-1\right)e^x - e^2\sqrt{e} \leq 0$ $\quad S = \left]-\infty; 2\right]$

5) $e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1 < 0$ $\quad S = \left]-\infty; 0\right[$

Elaborazioni

1) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \geq \left(\frac{4}{27}\right)^{\frac{x-1}{x}}$

Elaborando la struttura della disequazione si riconosce che non è possibile ricondurla alla disuguaglianza tra due potenze aventi la stessa base e per risolverla si deve applicare ai due membri la funzione logaritmica. Decidiamo di scegliere la funzione logaritmica in base naturale. Si ha:

$\ln\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \geq \ln\left(\frac{4}{27}\right)^{\frac{x-1}{x}}$, da cui $(x-1)\ln\left(\frac{3}{4}\right) \geq \frac{x-1}{x}\ln\left(\frac{4}{27}\right)$

Osserviamo che la disequazione può essere scritta nella forma

$$\frac{x-1}{x}\left(x\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{4}{27}\right)\right) \geq 0$$

per la quale si ha

$\frac{x-1}{x} \geq 0$, soddisfatta per (x<0)∨(x≥1);

$x\ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{4}{27}\right) \geq 0$, soddisfatta per $x \leq \ln\left(\frac{4}{27}\right) : \ln\left(\frac{3}{4}\right)$, cioè per $x \leq \frac{\ln 4 - \ln 27}{\ln 3 - \ln 4}$, risultando

$\frac{\ln 4 - \ln 27}{\ln 3 - \ln 4} \approx 6,64$.

Dal confronto dei segni dei due fattori si deduce che la disequazione in oggetto ammette come insieme delle soluzioni

$$S = \left]-\infty; 0\right[\cup \left[1; \frac{\ln 27 - \ln 4}{\ln 4 - \ln 3}\right]$$

*** ***

2) $2^{\sqrt{\frac{1}{x}}} > 4^{\sqrt{x-1}}$

La disequazione si può scrivere nella forma seguente

$$2^{\sqrt{\frac{1}{x}}} > 2^{2\sqrt{x-1}},$$

la quale, poiché la base delle due potenze è maggiore di uno, risulta equivalente alla disuguaglianza diretta tra gli esponenti

$$\sqrt{\frac{1}{x}} > 2\sqrt{x-1}$$

La disequazione ottenuta si può liberare della presenza delle radici elevando al quadrato i due membri con la condizione x≥1. Si ottiene il seguente sistema equivalente

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ \frac{1}{x} > 4(x-1) \end{cases}$$

Il sistema si semplifica nella forma

$\begin{cases} x \geq 1 \\ 1 > 4x(x-1) \end{cases}$, da cui si ottiene $\begin{cases} x \geq 1 \\ 4x^2 - 4x - 1 < 0 \end{cases}$

Le radici dell'equazione associata alla disequazione di secondo grado ottenuta sono

$x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$, per cui la disequazione è soddisfatta per $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Considerando la limitazione x≥1 si conclude che il sistema ammette come soluzioni i valori x che verificano la doppia disuguaglianza $1 \leq x < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ e in definitiva l'insieme delle soluzioni della disequazione irrazionale di partenza è l'intervallo $S = \left[1; \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$.

*** ***

3) $e^{-x} - 3 > -\frac{4}{e^{-x}+2}$

Poniamo $e^{-x} = t$ e riduciamo la disequazione alla forma

$t - 3 > -\frac{4}{t+2}$, per la quale deve valere la condizione t>0.

La disequazione, con la limitazione indicata t>0, si riduce al seguente sistema

$\begin{cases} t>0 \\ (t-3)(t+2)>-4 \end{cases}$, da cui $\begin{cases} t>0 \\ t^2-t-2>0 \end{cases}$. Risolta la disequazione di secondo grado si ha

$\begin{cases} t>0 \\ (t<-1)\vee(t>2) \end{cases}$ e quindi deve risultare t>2.

Ritornando alla variabile x si ottiene la disuguaglianza $e^{-x}>2$, equivalente alla disuguaglianza $-x>\ln 2$, quindi $x<-\ln 2$.

Conclusione

L'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è $S=\left]-\infty;-\ln 2\right[$.

*** ***

4) $e\sqrt{e^x}+\left(\sqrt{e}-1\right)e^x-e^2\sqrt{e}\le 0$

Per risolvere la disequazione poniamo $\sqrt{e^x}=t$, quindi si ha $e^x=t^2$, con t>0. La disequazione diventa

$\left(\sqrt{e}-1\right)t^2+e\cdot t-e^2\sqrt{e}\le 0$ (*)

Il discriminante dell'equazione associata è $\Delta=e^2\left(2\sqrt{e}-1\right)^2$ e le corrispondenti radici sono

$t_1=\dfrac{e\sqrt{e}}{1-\sqrt{e}}<0$, $t_2=e$.

La disequazione è soddisfatta nell'intervallo chiuso avente per estremi le radici; tenuto conto che risulta t>0, concludiamo che la (*) è soddisfatta dai valori $0<t\le e$.

Tornando alla variabile x, deve risultare

$0<\sqrt{e^x}\le e$, da cui

$0<e^x\le e^2$ quindi $x\le 2$.

Conclusione

L'insieme delle soluzioni della disequazione di partenza è $S=\left]-\infty;2\right]$.

*** ***

5) $e^{3x}-e^{2x}+e^x-1<0$

Osserviamo che il primo membro della disequazione si può scomporre in fattori e trasformare la disequazione come segue

$e^{2x}\left(e^x-1\right)+\left(e^x-1\right)<0$, e ancora $\left(e^x-1\right)\left(e^x+1\right)<0$;

a questo punto si può semplificare il fattore $\left(e^x+1\right)$ che è strettamente positivo e si perviene alla disequazione

$e^x-1<0$, che diventa $e^x<1$, soddisfatta nell'insieme $S=\left]-\infty;0\right[$.