Esercizi sulle disequazioni esponenziali

1) $5\left(3^{2x}-1\right)^4-2\left(3^{2x}-1\right)^2-7\le 0$ $\qquad S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\left(1+\log_3\left(1+\sqrt{\frac{7}{5}}\right)\right)\right]$

2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{7-3x}\le\sqrt[x]{\frac{16}{25}}$ $\qquad S=\left]-\infty;0\right[\cup\left[\frac{1}{3};2\right]$

3) $\frac{5}{3^{3x}}<\frac{4^{1-x}}{\sqrt{5^x}}$ $\qquad \mathrm{S}=\left]\frac{\log_{10}5-\log_{10}4}{\log_{10}27-\frac{1}{2}\log_{10}5-\log_{10}4};+\infty\right[$

Soluzione

1) $5\left(3^{2x}-1\right)^4-2\left(3^{2x}-1\right)^2-7\le 0$

Per la risoluzione sfruttiamo la tecnica suggerita dalle equazioni trinomie.

Ponendo $\left(3^{2x}-1\right)^2=t$ si ottiene la disequazione di secondo grado seguente

$5t^2-2t-7\le 0$ la cui equazione associata

$5t^2-2t-7=0$ ammette le radici $t_1=-1,\ t_2=\frac{7}{5}$. La disequazione è soddisfatta per i valori di t che verificano la doppia disuguaglianza $-1\le t\le\frac{7}{5}$. Tornando all'incognita x dovrà pertanto risultare

$-1\le\left(3^{2x}-1\right)^2\le\frac{7}{5}$, equivalente alla sola disequazione $\left(3^{2x}-1\right)^2\le\frac{7}{5}$; quest'ultima è equivalente alla doppia disuguaglianza $-\sqrt{\frac{7}{5}}\le 3^{2x}-1\le\sqrt{\frac{7}{5}}$, dalla quale si ottiene $1-\sqrt{\frac{7}{5}}\le 3^{2x}\le 1+\sqrt{\frac{7}{5}}$.

Osservato che $1-\sqrt{\frac{7}{5}}<0$ si deduce che l'incognita x deve verificare la disuguaglianza

$3^{2x}\le 1+\sqrt{\frac{7}{5}}$, quindi dovrà risultare $2x\le\log_3\left(1+\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$, da cui $x\le\frac{1}{2}\log_3\left(1+\sqrt{\frac{7}{5}}\right)$.

Conclusione

L'insieme delle soluzioni della disequazione in oggetto è $S=\left]-\infty;\frac{1}{2}\log_3\left(1+\sqrt{\frac{7}{5}}\right)\right]$

*** ***

2) $\left(\frac{4}{5}\right)^{7-3x} \le \sqrt[x]{\frac{16}{25}}$

La disequazione si può ricondurre ad una disuguaglianza tra due potenze aventi base 4/5. Precisamente

$$\left(\frac{4}{5}\right)^{7-3x} \le \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{2}{x}} \qquad (2.1)$$

Tenendo conto che la funzione esponenziale avente base compresa tra 0 e 1 è strettamente decrescente si trasforma la (2.1) nella disuguaglianza di verso opposto tra gli esponenti. Dunque

$$7-3x \ge \frac{2}{x} \qquad (2.2)$$

La (2.2) ridotta alla forma normale diventa

$$\frac{3x^2-7x-2}{x} \le 0 \qquad (2.3)$$

Segno e zeri del numeratore N(x).

$N(x)=3x^2-7x-2\ge 0$ La disequazione è soddisfatta per $\left(x\le\frac{1}{3}\right)\vee(x\ge 2)$.

Dal confronto con il segno del denominatore deduciamo che il segno della frazione è negativo per $(x<0)\vee\left(\frac{1}{3}<x<2\right)$. In definitiva l'insieme delle soluzioni della (2.3), e quindi della disequazione iniziale, è $\mathrm{S}=\left\{x\in R \middle| (x<0)\vee\left(\frac{1}{3}\le x\le 2\right)\right\}$.

*** ***

3) $\frac{5}{3^{3x}} < \frac{4^{1-x}}{\sqrt{5^x}}$

Riducendo la disequazione alla forma equivalente

$$5^{1+\frac{x}{2}} < 3^{3x}\cdot 4^{1-x}$$

si riconosce che occorre applicare ai due membri la funzione logaritmica. Scegliamo la funzione logaritmo in base 10 che è strettamente crescente, per cui si passa alla disequazione equivalente

$\log_{10}\left(5^{1+\frac{x}{2}}\right) < \log_{10}\left(3^{3x}\cdot 4^{1-x}\right)$, da cui, applicando le proprietà della potenza e del prodotto dei logaritmi, si ottiene

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_{10}5<\log_{10}\left(3^{3x}\right)+\log_{10}\left(4^{1-x}\right)$$, quindi

$$\left(1+\frac{x}{2}\right)\log_{10}5<3x\log_{10}3+(1-x)\log_{10}4$$

Dopo alcuni passaggi si perviene alla forma

$$x\left(\log_{10}27-\frac{1}{2}\log_{10}5-\log_{10}4\right)>\log_{10}5-\log_{10}4$$

Osservato che

$$\log_{10}27-\frac{1}{2}\log_{10}5-\log_{10}4\approx 0,4798...>0,$$

concludiamo che la disequazione è soddisfatta dai valori reali

$$x>\frac{\log_{10}5-\log_{10}4}{\log_{10}27-\frac{1}{2}\log_{10}5-\log_{10}4}$$, quindi $x>0,20197\ldots$.

Pertanto l'insieme delle soluzione è l'intervallo

$$S=\left]\frac{\log_{10}5-\log_{10}4}{\log_{10}27-\frac{1}{2}\log_{10}5-\log_{10}4};+\infty\right[$$