

Esercitazione sulle disequazioni irrazionali fratte

$$1) \frac{1+x-\sqrt{2x^2+1}}{1-\sqrt{3-x}} < 0$$

$$S =]0; 2[\cup]2; 3]$$

$$2) \frac{x-\sqrt{x^3-2x}}{|x+2|-x^2} \geq 0$$

$$S = [-\sqrt{2}; -1[\cup [\sqrt{2}; 2[\cup]2; +\infty[$$

Elaborazioni

$$1) \frac{1+x-\sqrt{2x^2+1}}{1-\sqrt{3-x}} < 0$$

La disequazione si affronta determinando preliminarmente il suo dominio di definizione, quindi studiando il segno del numeratore $N(x) > 0$ e quello del denominatore $D(x) > 0$; ciò fatto si determina il segno della frazione nel dominio di definizione in base alla regola del prodotto dei segni e si individuano gli intervalli in cui il segno della frazione risulta negativo.

Dominio di definizione

La disequazione è definita per i valori di x che verificano il seguente sistema

$$\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ 1-\sqrt{3-x} \neq 0 \end{cases}, \text{ che è soddisfatto in } D =]-\infty; 2[\cup]2; 3].$$

D rappresenta il dominio di definizione della disequazione.

Segno del numeratore

$$N(x) > 0, \text{ cioè } 1+x-\sqrt{2x^2+1} > 0, \text{ che diventa } \sqrt{2x^2+1} < x+1.$$

La disequazione è equivalente al sistema seguente

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x^2+1 < (x+1)^2 \end{cases}, \text{ che diventa } \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2-2x < 0 \end{cases} \text{ soddisfatto } \forall x \in]0; 2[.$$

Segno del denominatore

$D(x) > 0$, diventa $\sqrt{3-x} < 1$, soddisfatta per $x > 2$ e quindi, relativamente al dominio, nell'intervallo $]2; 3]$.

Conclusione

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore relativamente al dominio si conclude che la disequazione in esame è soddisfatta nell'insieme $S =]0; 2[\cup]2; 3]$.

$$2) \frac{x - \sqrt{x^3 - 2x}}{|x+2| - x^2} \geq 0$$

Dominio di definizione

La disequazione ha senso sotto le condizioni (C.d.E.)

$$\begin{cases} x^3 - 2x \geq 0 \\ |x+2| - x^2 \neq 0 \end{cases}$$

Sviluppiamo separatamente le due condizioni.

$$x^3 - 2x \geq 0, \text{ diventa } x(x^2 - 2) \geq 0.$$

Osserviamo che $x^2 - 2 \geq 0$ è soddisfatta dai valori reali $(x \leq -\sqrt{2}) \vee (x \geq \sqrt{2})$. Confrontando i segni dei due fattori x , $x^2 - 2$, si deduce che il loro prodotto è positivo nell'insieme

$$S_1 =]-\sqrt{2}; 0[\cup]\sqrt{2}; +\infty[.$$

La condizione $|x+2| - x^2 \neq 0$ la affrontiamo dal **punto di vista grafico**.

Siamo interessati ai valori della variabile x che soddisfano la disuguaglianza $|x+2| \neq x^2$.

Confrontando i grafici delle funzioni

$$y = |x+2|, y = x^2 \text{ si deduce}$$

immediatamente che gli unici valori da escludere sono $x = -1$ e $x = 2$ (vedere la Figura 1).

Sintetizzando i risultati **si conclude che il dominio di definizione della disequazione è l'insieme**

$$D = [-\sqrt{2}; 0] \cup [\sqrt{2}; +\infty[- \{-1; 2\}$$

Segno e zeri del numeratore: $N(x) \geq 0$

$x - \sqrt{x^3 - 2x} \geq 0$, diventa $\sqrt{x^3 - 2x} \leq x$,
equivalente al sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^3 - 2x \geq 0 \\ x^3 - 2x \leq x^2 \end{cases}, \text{ da cui } \begin{cases} x \geq 0 \\ x(x^2 - 2) \geq 0 \\ x(x^2 - x - 2) \leq 0 \end{cases}$$

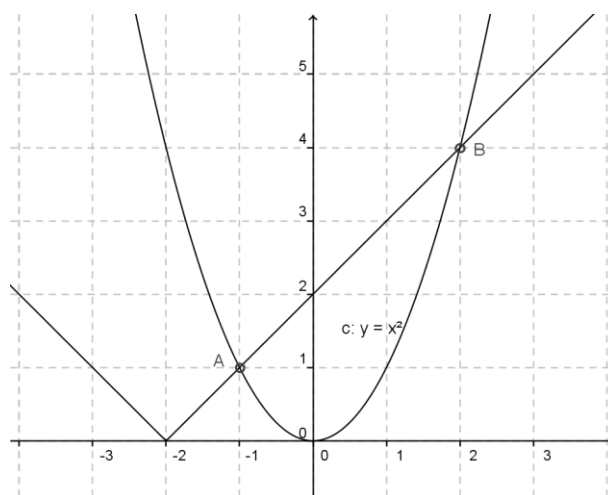


Figura 1- Illustrazione grafica per la risoluzione della disuguaglianza $|x+2| \neq x^2$

Il sistema è soddisfatto nell'insieme $\{0\} \cup [\sqrt{2}; 2[$.

Segno del denominatore: $D(x) > 0$

La disequazione $|x+2| - x^2 > 0$ è soddisfatta per $-1 < x < 2$.

Conclusione

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore, nonché tenendo conto del dominio di definizione della disequazione, si conclude che la disequazione in esame è soddisfatta nel seguente insieme

$$S = [-\sqrt{2}; -1[\cup [\sqrt{2}; 2[\cup]2; +\infty[$$