

## Esercitazione sulle disequazioni irrazionali

$$1) \quad 3x - \sqrt{1-x^2} \geq 0$$

$$S = \left[ \frac{1}{\sqrt{10}}; 1 \right]$$

$$2) \quad \sqrt{5x+7} \geq \frac{5}{2}x + 2$$

$$S = \left[ -\frac{7}{5}; \frac{2}{5} \right]$$

### Elaborazioni

$$1) \quad 3x - \sqrt{1-x^2} \geq 0$$

La disequazione si può scrivere nella forma equivalente

$$\sqrt{1-x^2} \leq 3x \quad (1.1)$$

La disequazione è equivalente al seguente sistema di disequazioni

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 3x \geq 0 \\ 1-x^2 \leq 9x^2 \end{cases}, \text{ che diventa } \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ x \geq 0 \\ 10x^2 - 1 \geq 0 \end{cases}$$

Risolvendo la prima e la terza disequazione del sistema si ottiene

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}, \text{ quindi } \begin{cases} x \leq -\frac{\sqrt{10}}{10} \\ x \geq \frac{\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{10} \leq x \leq 1.$$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è

$$S = \left[ \frac{\sqrt{10}}{10}; 1 \right].$$

### Approfondimento

In Figura 1 è risolta graficamente la disequazione in esame. Si osserva la semicirconferenza  $\lambda$ , la cui equazione

cartesiana è  $y = \sqrt{1-x^2}$ , e la retta  $r: y=3x$ . La

disequazione richiede di determinare per quali valori dell'ascissa  $x$  i punti della retta hanno ordinata maggiore o uguale ai corrispondenti punti della semicirconferenza e ciò limitatamente al dominio di

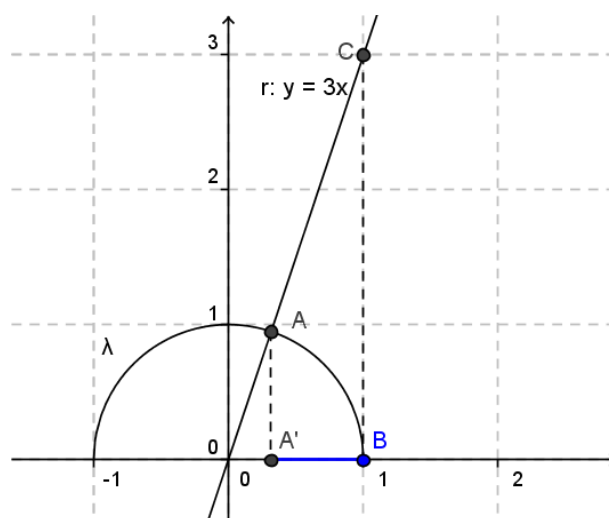


Figura 1-Risoluzione grafica della disequazione irrazionale  $3x - \sqrt{1-x^2} \geq 0$

definizione della disequazione che è l'intervallo  $[-1;1]$ . Ebbene, per  $\frac{\sqrt{10}}{10} \leq x \leq 1$  i punti della semicirconferenza descrivono l'arco AB, mentre i punti della retta r descrivono il segmento AC. I punti del segmento AC hanno ordinata non minore di quelli dell'arco AB.

\*\*\* \*\*

$$2) \sqrt{5x+7} \geq \frac{5}{2}x+2$$

La disequazione è equivalente all'unione logica dei due seguenti sistemi

$$A) \begin{cases} 5x+7 \geq 0 \\ \frac{5}{2}x+2 < 0 \end{cases} ;$$

$$B) \begin{cases} \frac{5}{2}x+2 \geq 0 \\ 5x+7 \geq \left(\frac{5}{2}x+2\right)^2 \end{cases}$$

Risolti i sistemi si riscontra che il sistema A) è soddisfatto nell'intervallo  $S_A = \left[-\frac{7}{5}; -\frac{4}{5}\right]$ .

Il sistema B) semplificato diventa

$$B) \begin{cases} x \geq -\frac{4}{5} \\ 25x^2 + 20x - 12 \leq 0 \end{cases}$$

Le radici dell'equazione associata alla disequazione di secondo grado del sistema sono  $x_1 = -\frac{6}{5}$ ,  $x_2 = \frac{2}{5}$  e la disequazione è soddisfatta nell'intervallo  $\left[-\frac{6}{5}; \frac{2}{5}\right]$ . Dal confronto con l'insieme delle soluzioni della prima disequazione si deduce che il sistema in oggetto è soddisfatto nell'intervallo  $S_B = \left[-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right]$ . Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della disequazione in esame è

$$S = S_A \cup S_B = \left[-\frac{7}{5}; -\frac{4}{5}\right] \cup \left[-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right] = \left[-\frac{7}{5}; \frac{2}{5}\right]$$