

Esercitazione sulle equazioni irrazionali

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

$$1) \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + 2} + \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0 \quad S = \{-1\}$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{x} - x} + \frac{3}{x + \sqrt{x}} = 0 \quad S = \{4\}$$

$$3) x^3 \sqrt{7 - \frac{1}{x}} = -2 \quad S = \{-1\}$$

$$4) \sqrt{4x^2 - 6x} = 4x + 4 \quad S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Elaborazioni

$$1) \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + 2} + \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

L'equazione è irrazionale fratta ed è definita per i valori di x che soddisfano le condizioni (C.d.E.)

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} \neq 0 \end{cases}$$

Nel rispetto delle (C.d.E.) l'equazione si riduce alla seguente

$$\frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1}) + x(x + 2)}{(x + 2)(x + \sqrt{x^2 - 1})} = 0$$

Ed eliminando il denominatore, si passa alla forma

$x^2 - (x^2 - 1) + x^2 + 2x = 0$, da cui $(x + 1)^2 = 0$. L'equazione ottenuta ammette il valore $x = -1$ come radice doppia e si riconosce immediatamente che detto valore soddisfa le (C.d.E.) Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{-1\}$.

$$2) \frac{1}{\sqrt{x} - x} + \frac{3}{x + \sqrt{x}} = 0$$

L'equazione è irrazionale fratta ed è definita per i valori di x che soddisfano le condizioni (C.d.E.)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} - x \neq 0, \text{ che elaborate diventano} \\ x + \sqrt{x} \neq 0 \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \text{ (C.d.E.)}$$

Nel rispetto delle (C.d.E.) l'equazione si riduce alla seguente

$$\frac{\sqrt{x} + x + 3(\sqrt{x} - x)}{(\sqrt{x} - x)(\sqrt{x} + x)} = 0, \text{ e questa frazione si annulla se si annulla il suo numeratore; dunque}$$

l'equazione da risolvere è

$$\sqrt{x} + x + 3(\sqrt{x} - x) = 0, \text{ che diventa } 4\sqrt{x} = 2x.$$

In virtù delle (C.d.E.) i due membri sono positivi, e una volta semplificato il fattore comune 2 quadrando si ottiene

$4x = x^2$, soddisfatta da $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, delle quali è accettabile solo la seconda. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \{4\}$.

3) $x^3 \sqrt{7 - \frac{1}{x}} = -2$

Ricordato che nel campo dei numeri reali esiste la radice di indice dispari di un qualsiasi numero, l'unica condizione da imporre per l'esistenza dell'equazione a definizione è

$$x \neq 0 \quad \text{(C.d.E.)}$$

Ciò posto si possono elevare i due membri al cubo e si ottiene l'equazione

$$x^3 \left(7 - \frac{1}{x} \right) = -8, \text{ da cui}$$

$$7x^3 - x^2 + 8 = 0 \quad (5.1)$$

La (5.1) ammette come radice $x = -1$, per cui la divisione $(7x^3 - x^2 + 8) : (x + 1)$, che può essere eseguita con il metodo veloce di Ruffini, fornisce come risultato

$$(7x^3 - x^2 + 8) : (x + 1) = 7x^2 - 8x + 8.$$

La (5.1) assume la seguente forma

$$(x + 1)(7x^2 - 8x + 8) = 0 \quad (5.2)$$

Per la legge di annullamento del prodotto si deve avere

$$(x+1=0) \vee (7x^2 - 8x + 8 = 0) \quad (5.3)$$

$x+1=0$, fornisce la radice già nota $x=-1$;

$7x^2 - 8x + 8 = 0$, ha il discriminante negativo, infatti $\frac{\Delta}{4} = 16 - 56 = -40$, quindi non ha radici reali.

Si conclude che l'equazione in esame ha la sola radice reale $x=-1$. $S = \{-1\}$.

4) $\sqrt{4x^2 - 6x} = 4x + 4$

Osserviamo che per l'esistenza dell'equazione il radicando del radicale deve essere non negativo e quindi deve essere non negativo anche il secondo membro; pertanto le condizioni di esistenza sono:

$$\begin{cases} 4x^2 - 6x \geq 0 \\ 4x + 4 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{C.d.E.})$$

che elaborate definiscono il dominio $D = [-1; 0] \cup \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Nel rispetto delle (C.d.E.), elevando al quadrato i due membri dell'equazione e riducendo i termini simili si ottiene

$$4x^2 - 6x = 2(8x^2 + 16x + 8), \text{ da cui}$$

$6x^2 + 19x + 8 = 0$. Le radici dell'equazione sono $x_1 = -\frac{8}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, delle quali appartiene al dominio di definizione solo la seconda. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.