

Esercitazione sulle equazioni irrazionali

Risolvere le seguenti equazioni irrazionali

1) $\sqrt{3x+12} - \sqrt{-x} = 2$

$$S = \{-1\}$$

2) $\sqrt{3x+7} + \sqrt{4-x} = 5$

$$S = \left\{ \frac{7}{4}; 3 \right\}$$

Elaborazioni

1) $\sqrt{3x+12} - \sqrt{-x} = 2$, scriviamo l'equazione nella forma equivalente

$$\sqrt{3x+12} = \sqrt{-x} + 2.$$

Si riconosce che l'equazione è definita sotto le condizioni (C.d.E.)

$$\begin{cases} 3x+12 \geq 0 \\ -x \geq 0 \end{cases}, \text{ che sono soddisfatte nell'intervallo } D = [-4; 0], \text{ che rappresenta il dominio di definizione}$$

dell'equazione.

Pertanto con $x \in D$ possiamo elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione e ottenere l'equazione equivalente

$$3x+12 = -x + 4\sqrt{-x} + 4, \text{ che diventa}$$

$$x+2 = \sqrt{-x} \quad (1.1)$$

Nella (1.1) i due membri devono essere non negativi, per cui dovrà essere $x \geq -2$. Si conclude che il dominio di definizione dell'equazione diventa l'intervallo $D' = [-2; 0]$. Operando con $x \in D'$ si possono elevare al quadrato ambo i membri della (1.1) ottenendo l'equazione

$$(x+2)^2 = -x, \text{ che diventa}$$

$x^2 + 5x + 4 = 0$, le cui radici sono $x_1 = -4$, $x_2 = -1$. Dei due valori ottenuti solo $x_2 = -1$ appartiene a D' , quindi l'equazione in esame ammette come soluzione l'insieme $S = \{-1\}$.

2) $\sqrt{3x+7} + \sqrt{4-x} = 5$

Si riconosce che l'equazione è definita sotto le condizioni (C.d.E.)

$$\begin{cases} 3x+7 \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}, \text{ che sono soddisfatte dai valori } -\frac{7}{3} \leq x \leq 4; \text{ il dominio di definizione dell'equazione è}$$

$$D = \left[-\frac{7}{3}; 4 \right]. \text{ Con } x \in D \text{ possiamo elevare al quadrato entrambi i membri dell'equazione e si ottiene}$$

$3x+7+2\sqrt{3x+7}\cdot\sqrt{4-x}+4-x=25$, che diventa

$$\sqrt{3x+7}\cdot\sqrt{4-x}=7-x \quad (2.1)$$

Osserviamo che nel dominio D entrambi i membri sono non negativi, quindi si possono elevare al quadrato ottenendo ancora un'equazione priva dei radicali equivalente. Dopo aver ridotto i termini simili si perviene all'equazione di secondo grado:

$4x^2-19x+21=0$, le cui radici sono $x=\frac{19\pm5}{8}$, quindi $x_1=\frac{7}{4}$, $x_2=3$. Entrambi i valori ottenuti

appartengono al dominio di definizione dell'equazione e perciò l'insieme delle soluzioni è $S=\left\{\frac{7}{4};3\right\}$.