

Esercizi sulle disequazioni esponenziali

- | | |
|---|---|
| 1) $16 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} - 4 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 15 \geq 0$ | $S = \left[0; \left(\log_2 \left(\frac{15}{2} \right) \right)^2 \right]$ |
| 2) $\frac{4^x - 8}{9 - 3^x} \geq 0$ | $S = \left[\frac{3}{2}; 2 \right[$ |
| 3) $\frac{2 \cdot 3^x - 9^x + 3}{x^2 - 1} \leq 0$ | $S =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$ |
| 4) $\frac{1}{3 \cdot 2^x - 2} - \frac{4}{2^x + 3} \geq 0$ | $S = \left] \log_2 \left(\frac{2}{3} \right); 0 \right]$ |
| 5) $(5^{2x-1} - 1)(4^{2x} - 3 \cdot 4^x + 2) \leq 0$ | $S =]-\infty; 0] \cup \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ |
| 6) $\frac{49 - 7^{3x-2}}{7^{\sqrt{x-2}} - 7^{4-x}} \geq 0$ | $S = [2; 3[$ |
| 7) $\frac{1 - \sqrt{2^{x-1}}}{3 - \sqrt[3]{9}} < 0$ | $S =]0; 1[\cup]2; +\infty[$ |

Soluzione

1) $16 \cdot 2^{\sqrt{x}+1} - 4 \cdot 4^{\sqrt{x}} - 15 \geq 0$

Possiamo elaborare la disequazione come segue

$$16 \cdot 2 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 4 \cdot 2^{2\sqrt{x}} - 15 \geq 0, \text{ da cui } -4 \left(2^{\sqrt{x}} \right)^2 + 32 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 15 \geq 0 \text{ e infine } 4 \left(2^{\sqrt{x}} \right)^2 - 32 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 15 \leq 0.$$

Ponendo $2^{\sqrt{x}} = t$ si ottiene la disequazione ausiliaria di secondo grado

$$4t^2 - 32t + 15 \leq 0 \text{ che è soddisfatta per i valori } \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{15}{2}; \text{ tornando alla variabile } x \text{ dovrà risultare}$$

$$\frac{1}{2} \leq 2^{\sqrt{x}} \leq \frac{15}{2}, \text{ da cui } \log_2 \left(\frac{1}{2} \right) \leq \sqrt{x} \leq \log_2 \left(\frac{15}{2} \right), \text{ cioè } -1 \leq \sqrt{x} \leq \log_2 \left(\frac{15}{2} \right). \text{ Osservato che i valori}$$

di x devono essere non negativi per l'esistenza del radicale, la prima disuguaglianza è verificata $\forall x \geq 0$,

mentre la seconda fornisce $x \leq \left(\log_2 \left(\frac{15}{2} \right) \right)^2$. Concludiamo che l'insieme delle soluzioni della

$$\text{disequazione è } S = \left[0; \left(\log_2 \left(\frac{15}{2} \right) \right)^2 \right].$$

2) $\frac{4^x - 8}{9 - 3^x} \geq 0$

Possiamo scrivere la frazione in modo diverso

$$\frac{2^{2x} - 2^3}{3^2 - 3^x} \geq 0$$

e studiare il segno del numeratore e del denominatore:

$$2^{2x} - 2^3 \geq 0, \text{ da cui } 2^{2x} \geq 2^3, \text{ soddisfatta per } x \geq \frac{3}{2};$$

$$3^2 - 3^x > 0, \text{ diventa } 3^x < 3^2, \text{ soddisfatta per } x < 2.$$

Dal confronto dei segni tra il numeratore e il denominatore si conclude che la frazione è soddisfatta nell'intervallo $S = \left[\frac{3}{2}; 2 \right[$.

$$3) \frac{2 \cdot 3^x - 9^x + 3}{x^2 - 1} \leq 0$$

Studiamo la disequazione $2 \cdot 3^x - 9^x + 3 \geq 0$, che diventa $(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 \leq 0$. Con $3^x = t$ la disequazione diventa $t^2 - 2t - 3 \leq 0$, che è soddisfatta per $-1 \leq t \leq 3$. Tornando alla variabile x , $-1 \leq 3^x \leq 3$, la prima disuguaglianza è soddisfatta per ogni x reale, mentre la seconda è soddisfatta per $x \leq 1$ e quindi entrambe sono soddisfatte per $x \leq 1$.

Per il denominatore della frazione si ha

$$x^2 - 1 > 0, \text{ verificata per } (x < -1) \vee (x > 1).$$

Dal confronto dei segni del numeratore e del denominatore al variare di x si deduce che l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S =]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

$$4) \frac{1}{3 \cdot 2^x - 2} - \frac{4}{2^x + 3} \geq 0$$

Si riduce la disequazione alla forma normale. Dopo alcuni passaggi si ha

$$\frac{11(1 - 2^x)}{3 \cdot 2^x - 2} \geq 0$$

Osserviamo che:

$$1 - 2^x \geq 0 \text{ per } x \leq 0;$$

$3 \cdot 2^x - 2 > 0$, soddisfatta per $x > \log_2\left(\frac{2}{3}\right)$, dal prodotto dei segni del numeratore e del denominatore si deduce che la disequazione è soddisfatta nell'insieme $S = \left] \log_2\left(\frac{2}{3}\right); 0 \right]$.

5) $(5^{2x-1} - 1)(4^{2x} - 3 \cdot 4^x + 2) \leq 0$

Per lo studio di questa disequazione si analizzano il segno e gli zeri dei due fattori, quindi si confrontano i segni per determinare il segno complessivo del prodotto degli stessi.

$5^{2x-1} - 1 \geq 0$ diventa $5^{2x-1} \geq 1$, soddisfatta se e solo se $2x - 1 \geq 0$, quindi per $x \geq \frac{1}{2}$;

$4^{2x} - 3 \cdot 4^x + 2 \geq 0$, con $4^x = t$ si passa alla disequazione di secondo grado ausiliaria $t^2 - 3t + 2 \geq 0$; le radici dell'equazione associata sono $t_1 = 1, t_2 = 2$, quindi la disequazione è soddisfatta per $(t \leq 1) \vee (t \geq 2)$. Tornando alla variabile x si ha $(4^x \leq 1) \vee (4^x \geq 2)$, che si trasforma come segue

$$(x \leq 0) \vee (2^{2x} \geq 2) \rightarrow (x \leq 0) \vee (2x \geq 1) \rightarrow (x \leq 0) \vee \left(x \geq \frac{1}{2}\right).$$

Dal confronto dei segni dei due fattori emerge che il prodotto degli stessi è negativo nell'intervallo $] -\infty; 0]$ e poiché per $x=0 \vee x=1/2$ si annulla almeno uno dei due fattori si conclude che l'insieme delle soluzioni della disequazione è $S =] -\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

6) $\frac{49 - 7^{3x-2}}{7^{\sqrt{x-2}} - 7^{4-x}} \geq 0$

Si analizzano il segno e gli zeri del numeratore ed il segno del denominatore, quindi si passa al confronto dei segni del numeratore e del denominatore per determinare il segno della frazione. Prima delle elaborazioni si tenga presente che la frazione esiste se e solo sono soddisfatte le seguenti condizioni di esistenza (C.E.)

$x-2 \geq 0$, deve essere non negativo l'argomento del radicale quadratico,

$7^{\sqrt{x-2}} - 7^{4-x} \neq 0$, il denominatore deve essere diverso da zero.

Numeratore

$49 - 7^{3x-2} \geq 0$ da cui $7^2 \geq 7^{3x-2}$ e passando alla disuguaglianza dello stesso verso tra gli esponenti $2 \geq 3x - 2$ si conclude che la disequazione è soddisfatta per $x \leq \frac{4}{3}$.

Denominatore

$7^{\sqrt{x-2}} - 7^{4-x} > 0$ diventa $7^{\sqrt{x-2}} > 7^{4-x}$, equivalente alla disequazione irrazionale $\sqrt{x-2} > 4-x$.

La disequazione ottenuta è equivalente all'unione dei due seguenti sistemi

$$(6.1) \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ 4-x < 0 \end{cases}, \quad (6.2) \begin{cases} 4-x \geq 0 \\ x-2 > (4-x)^2 \end{cases}$$

Il sistema (6.1) è soddisfatto nell'intervallo $]4; +\infty[$; il secondo sistema, dopo aver ridotto alla forma normale la seconda disequazione si presenta come segue

$$\begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 9x + 18 < 0 \end{cases}; \text{ poich\'e la disequazione di secondo grado \u00e8 soddisfatta per } 3 < x < 6,$$

concludiamo che il sistema \u00e8 soddisfatto nell'intervallo $]3; 4[$.

In definitiva il denominatore \u00e8 positivo nell'insieme $]3; 4[\cup]4; +\infty[=]3; +\infty[$

Tenendo conto delle elaborazioni sviluppate si riconosce che **le C.E. sono** $(x \geq 2) \wedge (x \neq 3)$.

Confronto dei segni del numeratore e del denominatore nel rispetto delle C.E.

Si riconosce che la disequazione \u00e8 soddisfatta solo nell'intervallo $S = [2; 3[$.

$$7) \frac{1 - \sqrt{2^{x-1}}}{3 - \sqrt[3]{9}} < 0$$

Osserviamo che

$$1 - \sqrt{2^{x-1}} > 0 \text{ diventa } 2^{\frac{x-1}{2}} < 1, \text{ da cui } \frac{x-1}{2} < 0, \text{ quindi } x < 1;$$

$$3 - \sqrt[3]{9} > 0 \text{ diventa } 3 > 3^{\frac{2}{3}}, \text{ soddisfatta dai valori di } x \text{ tali che } \frac{2}{x} < 1; \text{ questa disequazione ridotta}$$

$$\text{alla forma normale diventa } \frac{2-x}{x} < 0, \text{ che \u00e8 soddisfatta se e solo se } (x < 0) \vee (x > 2).$$

Confrontando i segni del numeratore e del denominatore si conclude che la disequazione in esame \u00e8 soddisfatta nell'insieme $S =]0; 1[\cup]2; +\infty[$.