Numeri complessi

A) Considerato il numero complesso $z=\dfrac{x-iy}{1+i\sqrt{3}}$ stabilire per quali valori reali di x ed y il numero z è reale.

B)[1] Considerato il numero complesso $z=\dfrac{3}{4}+i\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ risolvere i quesiti seguenti.

Q1- Scrivere il numero complesso in forma trigonometrica.

Q2- Calcolare $z\cdot\bar{z}$, $z:\bar{z}$, z^6, $\sqrt[3]{z^2}$

C)[2] Sfruttando opportunamente le proprietà delle potenze calcolare l'espressione $i^{13}\cdot(1+i)^{12}$.

Soluzione

A) Elaboriamo la forma algebrica del numero complesso moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore ed eseguiamo le operazioni di semplificazione.

$$z=\frac{x-iy}{1+i\sqrt{3}}=\frac{x-iy}{1+i\sqrt{3}}\cdot\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\frac{1}{4}\left[\left(x-y\sqrt{3}\right)-i\left(x\sqrt{3}+y\right)\right]$$

Il numero ottenuto è reale se è nullo il coefficiente della parte immaginaria, quindi se risulta:

$x\sqrt{3}+y=0\rightarrow y=-\sqrt{3}x$

Conclusione

Il numero complesso z è reale se e solo se tra x ed y sussiste la relazione $y=-\sqrt{3}x$.

B)

Q1- Il modulo del numero complesso è

$$\rho=\left|\frac{3}{4}+i\frac{3\sqrt{3}}{4}\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{16}+\frac{27}{16}}=\frac{3}{2}$$

Indicato con θ l'argomento si ha

$$\cos\theta=\frac{3}{4}:\rho=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2};\qquad sen\theta=\frac{3\sqrt{3}}{4}:\rho=\frac{\sqrt{3}}{2}$$, da cui $\theta=60°$.

La forma trigonometrica è pertanto: $z=\rho(\cos\theta+isen\theta)=\dfrac{3}{2}(\cos 60°+isen60°)$

Q2-

- $$z\cdot\bar{z}=\left(\frac{3}{4}+i\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{3}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)=\left(\frac{3}{4}\right)^2-i^2\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{9}{4}$$
- $$z:\bar{z}=\frac{\frac{3}{4}+i\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{4}}=\frac{\left(\frac{3}{4}+i\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}{\frac{9}{4}}=\frac{4}{9}\left(\frac{9}{16}-\frac{27}{16}+\frac{9\sqrt{3}}{8}i\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
- Per il calcolo della potenza z^6 sfruttiamo la regola di Moivre:

$$z^6=\left[\frac{3}{2}(\cos 60°+isen60°)\right]^6=\left(\frac{3}{2}\right)^6\left[\cos(6\cdot 60°)+isen(6\cdot 60°)\right]=$$
$$\frac{729}{64}(\cos 360°+isen360°)=\frac{729}{64}$$

---

[1] Esercizio assegnato nel compito in classe in 4E/Liceo Scientifico G. Stampacchia il 3-06-2010

[2] Esercizio assegnato nel compito in classe in 4E/Liceo Scientifico G. Stampacchia il 3-06-2010

- Per il calcolo di $\sqrt[3]{z^2}$, osserviamo che risulta:

$$\sqrt[3]{z^2} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}\left(\cos 120° + i sen 120°\right)}$$

e dunque si tratta di scrivere le tre radici cubiche del numero complesso $\frac{9}{4}\left(\cos 120° + i sen 120°\right)$.

I valori richiesti si determinano applicando la formula

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\left[\cos\left(\frac{120° + k \cdot 360°}{3}\right) + i \cos\left(\frac{120° + k \cdot 360°}{3}\right)\right]$$, con k=0, 1, 2.

Le tre radici sono:

$$w_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\left[\cos\left(40°\right) + i \cos\left(40°\right)\right]$$

$$w_1 = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\left[\cos\left(160°\right) + i \cos\left(160°\right)\right]$$

$$w_2 = \sqrt[3]{\frac{9}{4}}\left[\cos\left(280°\right) + i \cos\left(280°\right)\right]$$

C) Per il calcolo dell'espressione $i^{13} \cdot (1+i)^{12}$ scriviamo innanzitutto i numeri che figurano come basi delle potenze in forma esponenziale, quindi sfruttando la formula di Moivre si calcola il risultato dell'espressione.

$$i^{13} \cdot (1+i)^{12} = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i sen\frac{\pi}{2}\right)^{13} \cdot \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i sen\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{13} \cdot 2^6 \cdot \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12} =$$

$$2^6 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}\cdot 13 + i\frac{\pi}{4}\cdot 12} = 2^6 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi + 3\pi\right)} = 2^6 \cdot e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2^6$$