

Numeri complessi

Operazioni di base, risoluzione di equazioni nel campo complesso ⁽¹⁾

Es1- Semplificare l'espressione, scrivendo il risultato sotto forma algebrica $\frac{1+(i-2)^2}{(2+i)^2-1} : \frac{i(1+i)^3}{(1-i)^3-i}$

Es2- Considerato il numero complesso $z = \frac{x+i}{2x-iy}$, con x ed y reali, stabilire se esistono valori per le variabili x ed y tali che Z sia reale o immaginario puro.

Es3- Risolvere nel campo complesso l'equazione che segue e rappresentare tutte le radici nel piano di Gauss.

$$z^6 - z^3 - 2 = 0$$

Es4- Risolvere nel campo complesso l'equazione:

$$z^8 + 4z^2 = 0$$

SOLUZIONE

Es1- $\frac{1+(i-2)^2}{(2+i)^2-1} : \frac{i(1+i)^3}{(1-i)^3-i} = \dots = \frac{4(1-i)}{2+4i} : \frac{i(-2+2i)}{-2-3i} = \dots = \frac{5+i}{1-3i} = \dots = -\frac{1}{5} - \frac{8}{5}i$

Es2- Riduciamo il numero complesso alla forma algebrica di base.

$$z = \frac{x+i}{2x-iy} = \frac{x+i}{2x-iy} \cdot \frac{2x+iy}{2x+iy} =$$

$$\frac{2x^2 - y}{4x^2 + y^2} + \frac{i(2x + xy)}{4x^2 + y^2}$$

Il numero complesso ottenuto è reale se si annulla il coefficiente della parte immaginaria, dunque se $2x + xy = 0 \rightarrow (x=0) \vee (y=-2)$

Poiché tra i punti di ascissa nulla vi è l'origine O(0;0) e per x=0 e y=0 si annulla il denominatore della frazione rappresentativa di z, è evidente che dall'asse delle ordinate deve essere escluso detto punto. Concludiamo che **z è reale** se la coppia (x;y) rappresenta un punto appartenente all'asse delle ordinate, diverso dall'origine O, oppure un punto della retta b: y=-2.

Il numero complesso z è immaginario puro se si annulla la parte reale e ciò si verifica se la coppia (x;y) individua un punto della parabola di

equazione $\lambda : 2x^2 - y = 0$. Anche in questo caso, l'origine (0;0) deve essere escluso dalle soluzioni per l'esistenza stessa del numero complesso.

Nella figura riportata a lato sono rappresentate la parabola (in colore blu) e le due rette, indicate con a e b, in colore rosso.

Es3- L'equazione in esame è **trinomia di sesto grado**; la possiamo risolvere riconducendoci prima di tutto all'equazione ausiliaria di secondo grado corrispondente.

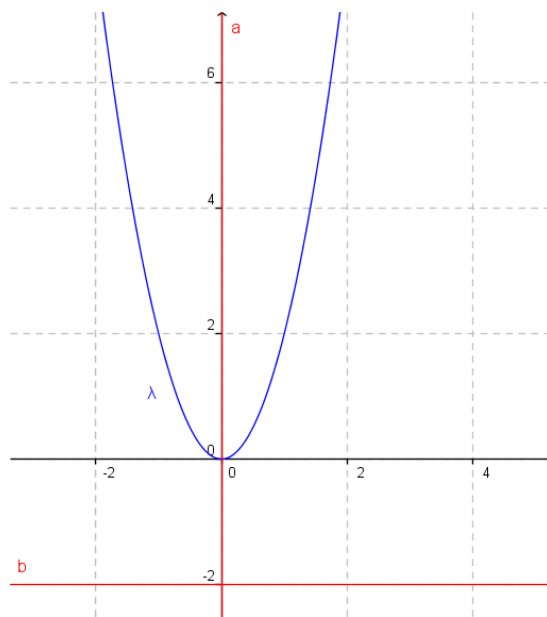


Figura 1- La parabola è il luogo dei punti (x;y) per i quali z è immaginario puro. L'insieme delle due rette x=0, y=-2 è il luogo dei punti (x;y) per i quali z è reale.

⁽¹⁾ Esercizi assegnati nel compito in classe M6_4D_29-05-12, Indirizzo PNI

$$z^6 - z^3 - 2 = 0$$

Poniamo

$$z^3 = t \rightarrow t^2 - t - 2 = 0 \rightarrow t_2^1 = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \rightarrow t_1 = -1, t_2 = 2.$$

Dal primo valore si ottengono tre radici:

$$t_1 = -1 \rightarrow z^3 = -1 \rightarrow z = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{e^{i\pi}} = \sqrt[3]{e^{i(\pi+2k\pi)}}.$$

Le radici cubiche del numero complesso $e^{i\pi}$ sono tre.

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \quad z_1 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1;$$

$$z_2 = e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})} = e^{i\frac{5\pi}{3}} = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}$$

Altre tre radici si ottengono dal secondo valore:

$$t_2 = 2 \rightarrow z^3 = 2 \rightarrow z = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2}(\cos 0 + i \sin 0)$$

Le radici sono:

$$z'_0 = \sqrt[3]{2}; \quad z'_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} =$$

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right); \quad z'_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{4\pi}{3}} =$$

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}\right)$$

In conclusione, l'equazione in esame ammette come radici i sei numeri complessi

$$z_0, z_1, z_2, z'_0, z'_1, z'_2.$$

In Figura 2 sono rappresentate le sei radici dell'equazione; tre sono sulla circonferenza di raggio unitario e altre tre sono sulla circonferenza di raggio $r = \sqrt[3]{2}$. In ciascuno dei due casi i punti corrispondenti sono vertici di un triangolo equilatero

[Comandi in GeoGebra per la rappresentazione delle radici](#)

$(\cos(5\pi/3), \sin(5\pi/3))$ per z_2 ;

$(2^{1/3} \cos(2\pi/3), 2^{1/3} \sin(2\pi/3))$ per z'_1 ;

$(2^{1/3} \cos(4\pi/3), 2^{1/3} \sin(4\pi/3))$ per z'_2 .

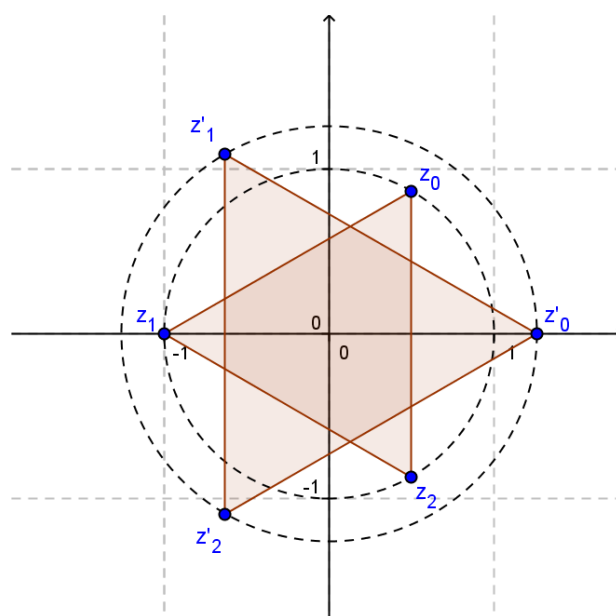


Figura 2

Es4. $z^8 + 4z^2 = 0$

Si procede con la scomposizione in fattori del polinomio e applicando la legge di annullamento del prodotto.

$$z^8 + 4z^2 = 0 \rightarrow z^2(z^6 + 4) = 0 \rightarrow$$

$$(z^2 = 0) \vee (z^6 = -4).$$

Due radici coincidono con lo zero: $z_1 = z_2 = 0$.

Altre sei radici coincidono con le radici seste di -4. Per determinarle scriviamo il numero in forma esponenziale ed esprimiamo in forma compatta i valori delle radici richieste.

$$-4 = 4e^{i\pi}$$

$$\rightarrow w_k = \sqrt[6]{4} \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right),$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

In Figura 3 sono rappresentati i punti corrispondenti alle radici. Due punti coincidono con l'origine del sistema di riferimento; altri sei sono i vertici di un esagono regolare e si trovano sulla

circonferenza con centro $O(0;0)$ e raggio $r = \sqrt[3]{2}$.

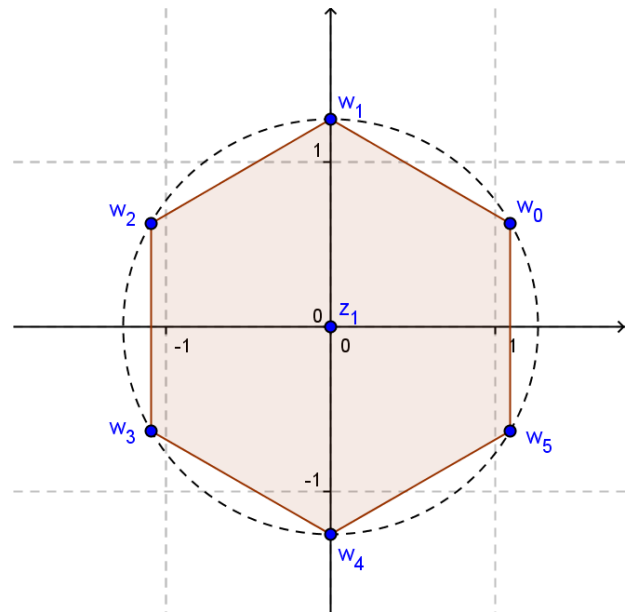


Figura 3

Comandi in GeoGebra per la rappresentazione delle radici

$(2^{1/3} \cdot \cos(\pi/6), 2^{1/3} \cdot \sin(\pi/6))$ per w_0 ;

$(2^{1/3} \cdot \cos(3\pi/6), 2^{1/3} \cdot \sin(3\pi/6))$ per w_1 ;

...

$(2^{1/3} \cdot \cos(11\pi/6), 2^{1/3} \cdot \sin(11\pi/6))$ per w_5 .