

EQUAZIONI NEL CAMPO COMPLESSO

(1)

Risolvere nel campo complesso l'equazione

$$(z^3 - i)\left(\bar{z}^2 + i\right) = 0$$

Soluzione

Pr il principio dell'annullamento del prodotto l'insieme delle radici dell'equazione in esame è dato dall'unione degli insiemi delle radici delle seguenti equazioni:

$$\text{a) } z^3 - i = 0, \quad \text{b) } \bar{z}^2 + i = 0$$

Per la prima equazione i valori delle radici sono $z = \sqrt[3]{i}$.

Si tratta di tre valori distinti; per determinarli si può scrivere il numero complesso i in forma trigonometrica:

$$i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

Ricordiamo che le radici n -sime del numero complesso $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ sono i numeri complessi $w_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$, che si ottengono con $k=0;1;2;\dots;n-1$.

Ciò premesso, le radici cubiche del numero complesso in oggetto sono:

$$w_0 = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$w_1 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}\pi \right) = \cos \left(\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{6} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$w_2 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}\pi \right) = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) = -i$$

Per la seconda equazione si ha

$$\bar{z}^2 + i = 0 \rightarrow \bar{z} = \sqrt{-i},$$

intendendo con la scrittura che le radici cercate sono i numeri complessi coniugati delle radici quadrate $\sqrt{-i}$.

Poiché risulta $-i = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right)$, le due radici quadrate cercate sono:

$$w'_0 = \cos \left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0 + i = i;$$

$$w'_1 = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi \right) = 0 - i = -i$$

Conclusione

Le radici dell'equazione in esame sono:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \quad -i \text{ (soluzione doppia);} \quad i$$

¹ Esercizio assegnato nella prova d'esame di Analisi Matematica I- Ingegneria – Lecce- 26-02-2010