

Esercitazione sui numeri complessi

Considerati i due numeri complessi $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$, risolvere i quesiti che seguono.

Q1- Scrivere i due numeri complessi in forma trigonometrica.

Q2- Rappresentare i due numeri complessi nel piano di Argand-Gauss con i vettori corrispondenti.

Q3- Rappresentare il vettore corrispondente al numero complesso $z_1 + z_2$ e calcolarne il modulo.

Q4- Calcolare il numero complesso $z_1^2 \cdot z_2$, esprimendo il risultato sia in forma trigonometrica, sia in forma algebrica.

Q5- Calcolare l'espressione $z_1^3 : z_2^4$

Q6- Calcolare $\overline{z_1} : z_2$

Q7- Determinare il più piccolo numero intero naturale positivo n per il quale il numero $z_1^n \cdot z_2^n$ è reale.

Soluzione

Q1- Posto $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$ risulta:

a) $\rho_1 = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; $\cos \theta_1 = -\frac{1}{2}$; $\sin \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; l'anomalia del numero complesso è

$\theta_1 = \frac{2}{3}\pi$ e quindi la forma trigonometrica è $z_1 = 2 \left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi \right)$;

b) $\rho_2 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1$; $\cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin \theta_2 = \frac{1}{2}$; l'anomalia è $\theta_2 = \frac{\pi}{6}$ e dunque la forma

trigonometrica richiesta è $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.

Q2- La rappresentazione dei due numeri complessi è realizzata in Figura 1, dove è rappresentato anche il numero complesso $z_1 + z_2$ il cui vettore corrispondente è in colore rosso.

Q3- Il numero complesso $z_1 + z_2$ è

$$z_1 + z_2 = \left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right)$$

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{\left(-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{1}{2} \right)^2} = \sqrt{5}$$

Indicando con θ l'anomalia del numero complesso si ha

$$\cos \theta = \frac{-1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{10}, \text{ da cui}$$

$$\theta = \arccos \left(\frac{\sqrt{15} - 2\sqrt{5}}{10} \right) \approx 93^\circ 26' 6''$$

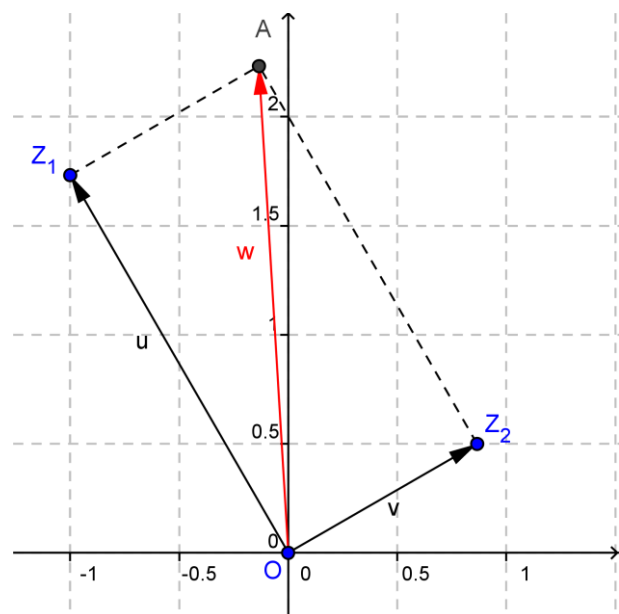


Figura 1

Q4- Per calcolare il numero complesso richiesto si può sfruttare la formula di Moivre

$$z_1^2 \cdot z_2 = [\rho_1 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)]^2 \cdot \rho_2 (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \rho_1^2 \rho_2 (\cos 2\theta_1 + i \sin 2\theta_1) (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) =$$

$$\rho_1^2 \rho_2 (\cos (2\theta_1 + \theta_2) + i \sin (2\theta_1 + \theta_2)) = 2^2 \cdot 1 \left(\cos \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) \right) =$$

$$4 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -4i$$

Q5- Anche per questo calcolo sfruttiamo la formula di Moivre. Si ha:

$$z_1^3 : z_2^4 = \rho_1^3 (\cos 3\theta_1 + i \sin 3\theta_1) : (\rho_2^4 (\cos 4\theta_2 + i \sin 4\theta_2)) =$$

$$\frac{\rho_1^3}{\rho_2^4} (\cos (3\theta_1 - 4\theta_2) + i \sin (3\theta_1 - 4\theta_2)) = 8 \left(\cos \left(2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(2\pi - 4 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right) =$$

$$8 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = -4 - 4\sqrt{3}i$$

Q6- Ricordato che il coniugato del numero complesso $z = x + iy$ è il numero complesso $\bar{z} = x - iy$ si ha:

$$\bar{z}_1 : z_2 = (-1 - \sqrt{3}i) : \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = -\frac{2(1 + \sqrt{3}i)}{\sqrt{3} + i} \cdot \frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{3} - i} = \dots = -\sqrt{3} - i$$

Q7- Ricordiamo che un numero complesso è reale se è nullo il coefficiente della parte immaginaria. Se del numero complesso si ha la forma trigonometrica basta imporre che l'anomalia θ sia tale che $\sin \theta = 0$. Ciò premesso, scriviamo l'espressione assegnata in forma trigonometrica e sfruttiamo ancora la formula di Moivre.

$$z_1^n \cdot z_2^n = (z_1 \cdot z_2)^n = (\rho_1 \rho_2 (\cos (\theta_1 + \theta_2) + i \sin (\theta_1 + \theta_2)))^n =$$

$$\rho_1^n \rho_2^n (\cos (n(\theta_1 + \theta_2)) + i \sin (n(\theta_1 + \theta_2)))$$

Affinché il numero complesso sia reale deve risultare

$$n(\theta_1 + \theta_2) = n \left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = 2k\pi \quad \text{da cui} \quad n \cdot \frac{5\pi}{6} = 2k\pi \rightarrow n = \frac{12}{5}k$$

Il primo valore utile positivo per n si ha con $k=5$, cioè deve essere $n=12$. Pertanto risulta

$$z_1^{12} \cdot z_2^{12} = \rho_1^{12} \rho_2^{12} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 2^{12}$$