

Numeri complessi

(Operazioni con i numeri complessi, risoluzione di un'equazione di terzo grado)

Esercizio_4⁽¹⁾

- a) Calcolare il valore della seguente espressione numerica: $i^6 + i^{10} + i^{2011}$
- b) Dopo aver scritto in forma trigonometrica i numeri complessi $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}$, $z_2 = -1+i$, calcolare il numero complesso $z_1^{12} \cdot z_2^{10}$.
- c) Calcolare nel campo complesso le radici dell'equazione $z^3 + 4iz = 0$

Soluzione

- a) Osserviamo che $i^4 = 1$ ed anche $i^{4k} = 1$, con $k \in \mathbb{N}$.
Ciò premesso sviluppiamo le potenze presenti nell'espressione assegnata.
 $i^6 + i^{10} + i^{2011} = i^4 \cdot i^2 + i^{4 \cdot 2} \cdot i^2 + i^{4 \cdot 502} \cdot i^3 = 1(-1) + 1(-1) + 1(-i) = -2 - i$

b) Primo numero complesso

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{\sqrt{3}-i} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}+i} = \frac{\sqrt{3}+i}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$$

$$\text{Il modulo del numero complesso è } \rho_1 = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{16}} = \frac{1}{2}$$

Calcolo dell'argomento principale (anomalia)

$$\cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} : \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \theta_1 = \frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}; \quad \text{si deduce che } \theta_1 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{La forma trigonometrica del numero è: } z_1 = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

Secondo numero complesso

$$\rho_2 = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

Calcolo dell'argomento principale

$$\cos \theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{dunque } \theta_2 = \frac{7\pi}{4}.$$

$$\text{La forma trigonometrica del numero è: } z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right)$$

Calcolo dell'espressione $z_1^{12} \cdot z_2^{10}$

Per il calcolo dell'espressione sfruttiamo la regola di Moivre per la potenza di un numero complesso. Si ha:

$$\begin{aligned} z_1^{12} \cdot z_2^{10} &= \left(\frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right)^{12} \cdot \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right)^{10} = \frac{1}{2^{12}} \left(\cos \frac{12\pi}{6} + i \sin \frac{12\pi}{6} \right) \\ &= \left(\sqrt{2} \right)^{10} \left(\cos \frac{10 \cdot 7\pi}{4} + i \sin \frac{10 \cdot 7\pi}{4} \right) = \frac{1}{2^{12}} (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) \cdot 2^5 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2^7} (1 + i \cdot 0)(0 - i) = -\frac{1}{128} i \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Esercizio assegnato nel compito in classe M1_5D-06-10-2011

c) Risoluzione dell'equazione

Osserviamo che $z^3 + 4iz = 0 \rightarrow z(z^2 + 4i) = 0$ da cui, per la legge di annullamento del prodotto, si deduce che la prima radice è $z_1 = 0$.

Uguagliando a zero il secondo fattore si trovano altre due radici.

$$z^2 + 4i = 0 \rightarrow z = \sqrt{-4i}$$

Poiché sussiste la forma trigonometrica $-4i = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$, si determinano le due radici quadrate di $-4i$ che sono:

$$w_0 = \sqrt{4}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$w_1 = \sqrt{4}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \pi\right)\right) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione in esame è:

$$S = \{0; -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; \sqrt{2} - i\sqrt{2}\}$$