

EQUAZIONI NEL CAMPO COMPLESSO

Esercizio_1¹

Risolvere nel campo complesso le seguenti equazioni.

a) $z^3 + 1 - i = 0$

b) $z^6 - 4z^2 = 0$

Soluzione

- a) L'equazione in esame ammette come soluzioni le radici cubiche del numero complesso $(-1+i)$; formalmente i valori delle radici si indicano ponendo $z = \sqrt[3]{-1+i}$.

Si tratta di tre valori distinti; per determinarli si può scrivere il numero complesso $(-1+i)$ in forma trigonometrica:

$$-1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi \right).$$

Ricordiamo che le radici n-sime del numero complesso $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ sono i numeri complessi $w_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$, che si ottengono con $k=0;1;2;\dots;n-1$.

Ciò premesso, le radici cubiche del numero complesso in oggetto sono:

$$w_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$w_1 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi \right) \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right)$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{4}{3}\pi \right) \right) = \sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$$

Approfondimento

Rappresentazione geometrica delle radici

Le radici cubiche determinate, rappresentandole sul piano di Argand-Gauss, si trovano sulla circonferenza avente il centro nell'origine degli assi e raggio $r = \sqrt[6]{2}$; precisamente sono i vertici di un triangolo equilatero.

Operatività con GeoGebra

- 1) Rappresentare la circonferenza scrivendo la sua equazione

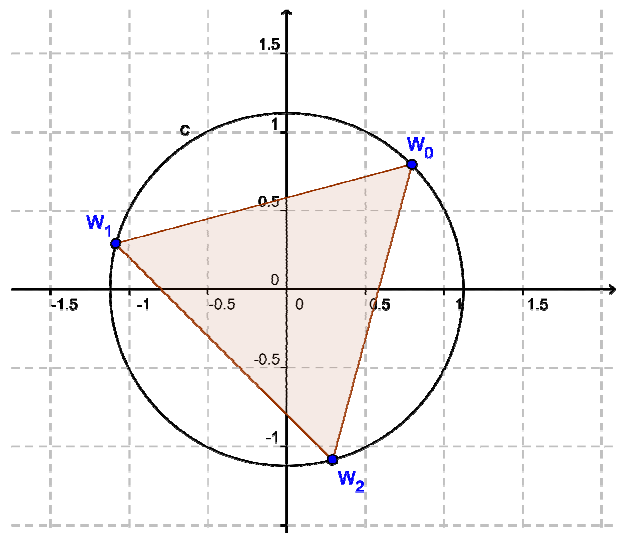
cartesiana: $x^2 + y^2 = (\sqrt[6]{2})^2$

digitando nella barra della formula $x^2+y^2=2^{1/3}$.

- 2) Per rappresentare il punto corrispondente alla radice w_0

digitare nella barra della formula $(2^{1/6} \cdot \cos(\pi/4), 2^{1/6} \cdot \sin(\pi/4))$;

analogamente, per rappresentare il punto corrispondente alla radice w_1 digitare nella barra della formula $(2^{1/6} \cdot \cos(11\pi/12), 2^{1/6} \cdot \sin(11\pi/12))$; digitare, infine, $(2^{1/6} \cdot \cos(19\pi/12), 2^{1/6} \cdot \sin(19\pi/12))$, per rappresentare il punto corrispondente alla radice w_2



¹ Esercizio assegnato nel compito in classe M1-5I-071010

b) Risoluzione dell'equazione $z^6 - 4z^2 = 0$

L'equazione è di sesto grado ed ammette sei radici.

Scomponendo il primo membro in fattori l'equazione diventa: $z^2(z^4 - 4) = 0$ ed applicando il principio dell'annullamento del prodotto si ricavano subito le due radici coincidenti $z_1 = z_2 = 0$; le altre quattro radici sono le radici quarte del numero 4.

Infatti da $z^4 - 4 = 0 \rightarrow z = \sqrt[4]{4}$

Poiché $4 = 4(\cos 0 + i \sin 0)$, le quattro radici quarte sono:

$$w_0 = \sqrt[4]{4} \left(\cos \frac{0}{4} + i \sin \frac{0}{4} \right) = \sqrt{2} (\cos 0 + i \sin 0); \quad w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right);$$

$$w_2 = \sqrt{2} (\cos \pi + i \sin \pi); \quad w_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)$$