

Equazioni nel campo complesso

Es_1) $z|z| - 2z + i = 0$

Soluzione

Risolviamo l'equazione scrivendo il numero complesso z nella forma algebrica: $z = x + iy$, con x ed y reali.

Ricordando che $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, l'equazione in esame diventa

$$(x + iy)\sqrt{x^2 + y^2} - 2(x + iy) + i = 0 \rightarrow x(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) + i(y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + 1) = 0$$

I valori delle incognite x, y si determinano imponendo che siano nulli i coefficienti della parte reale e della parte immaginaria. Si deve risolvere dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} x(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) = 0 \\ y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{Il sistema è equivalente all'unione logica dei due seguenti}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x = 0 \\ y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - 2 = 0 \\ y\sqrt{x^2 + y^2} - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Il sistema **a)** si trasforma nel seguente

$$\begin{cases} x = 0 \\ y|y| - 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{che a sua volta equivale all'unione dei due seguenti}$$

$$\text{a.1) } \begin{cases} x = 0 \\ (y \geq 0) \wedge (y^2 - 2y + 1) = 0 \end{cases} \quad \text{a.2) } \begin{cases} x = 0 \\ (y < 0) \wedge (y^2 + 2y - 1) = 0 \end{cases}$$

Il sistema a.1) ammette come soluzione $x=0, y=1$ e quindi il numero complesso $z_1 = i$ è soluzione dell'equazione in esame.

Il sistema a.2) ammette come soluzione $x=0, y = -1 - \sqrt{2}$ e quindi risulta soluzione dell'equazione in esame anche il numero complesso $z_2 = -(1 + \sqrt{2})i$.

Nel sistema **b)**, una volta effettuata nella seconda equazione la sostituzione $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$, si ottiene l'uguaglianza assurda $1=0$, quindi il sistema non ammette soluzioni.

Concludiamo che l'equazione in esame ammette come insieme di soluzioni $S = \{z_1; z_2\}$.

Es_2) $z^3 = |z|^2$

Soluzione

Ricordiamo che sussiste l'uguaglianza $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, essendo $z = x + iy$ e $\bar{z} = x - iy$.

Tenendo presente detta relazione l'equazione assegnata può essere scritta come segue:

$$z^3 = z \cdot \bar{z} \rightarrow z(z^2 - \bar{z}) = 0 \quad (2.1)$$

Dalla forma (2.1) si evince che $z=0$ è soluzione dell'equazione; le altre soluzioni si ottengono risolvendo l'equazione

$$z^2 - \bar{z} = 0,$$

che, passando alla forma algebrica dei numeri complessi $z, \bar{z}$, diventa

$$(x + iy)^2 - (x - iy) = 0 \rightarrow (x^2 - y^2 - x) + i(2xy + y) = 0$$

Si imposta il sistema risolvendo annullando i coefficienti della parte reale e della parte immaginaria. Si ha

$$\begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2xy + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 - y^2 - x = 0 \\ 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce come soluzioni i numeri complessi $z_1 = 0, z_2 = 1$; il secondo sistema fornisce come soluzioni i numeri complessi

$$z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Concludiamo che l'insieme delle soluzioni dell'equazione è: $S = \{z_1; z_2; z_3; z_4\}$.