

Numeri Complessi

Quesiti estratti da esercitazioni proposte per la preparazione all'esame di

Analisi Matematica 1 presso il Politecnico di Torino

1) Nell'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$, valutare il valore di verità della seguente proposizione:

<<Con $z_0 = -2 + 2i$, non esiste alcun numero complesso z che soddisfa entrambe le condizioni

$$|z + z_0| = 1, \operatorname{Im}(z) = 1 >>.$$

2) Determinare le radici cubiche del numero complesso $z_0 = -2 + 2i$.

2.1)⁽¹⁾ Rappresentare nel piano di Argand-Gauss le radici cubiche di $z_0 = -2 + 2i$.

Elaborazioni

1) **Proviamo che la proposizione è vera**, quindi che non esiste alcun numero complesso che verifichi le due proprietà richieste.

Con $z_0 = -2 + 2i$, sia $z = x + iy$ il generico numero complesso scritto nella forma algebrica.

La condizione sul modulo per $z + z_0$ si esplicita come segue:

$$|z + z_0| = |x + iy - 2 + 2i| = |x - 2 + i(y + 2)| = \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2}.$$

Con $\operatorname{Im}(z)$ si intende il coefficiente della parte immaginaria di z , dunque deve essere $\operatorname{Im}(z) = y = 1$.

Le due condizioni richieste indicano che le variabili reali x, y devono essere soluzioni del sistema di equazioni:

$$\begin{cases} |z + z_0| = 1 \\ \operatorname{Im}(z) = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2} = 1 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ da cui si ottiene l'equazione } \Leftrightarrow (x - 2)^2 + 3^2 = 1 \rightarrow (x - 2)^2 = -8$$

Quest'equazione non ha alcuna soluzione reale per x , perciò non esiste alcun numero complesso z che soddisfi le due richieste. **Concludiamo che la proposizione in esame è vera.**

2) Il numero complesso z_0 ha come modulo

$$\rho = |z_0| = |-2 + 2i| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

L'argomento (detto anche anomalia del numero complesso) è l'angolo θ che il vettore rappresentativo del numero complesso nel **piano di Argand-Gauss** forma con il **semiasse reale positivo**: $\theta = 3\pi/4$.

⁽¹⁾ Questa parte dell'esercizio non era presente nell'esercitazione proposta e rappresenta, pertanto, una libera proposta didattica e di ricerca del titolare del sito <https://www.matematicaescuola.it> a beneficio dei frequentatori della piattaforma.

Il numero complesso può essere rappresentato anche in forma esponenziale come segue: $-2+2i = \rho \cdot e^{i\theta} = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$,

per la quale ricordiamo che sussiste l'uguaglianza

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

nota come identità **di Eulero**.

*** **

Nota teorica di approfondimento

- È opportuno precisare che il fattore esponenziale $e^{i\theta}$ è periodico ed ha periodicità 2π ; sussiste cioè l'identità

$$e^{i\theta} = e^{i(\theta+k \cdot 2\pi)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall \theta \in \mathbb{R},$$

come di seguito si verifica, ritenuta acquisita l'identità di Eulero.

Con $k \in \mathbb{Z}$ possiamo scrivere

$$e^{i(\theta+k \cdot 2\pi)} = e^{i\theta + i(k \cdot 2\pi)} = \cos(\theta + k \cdot 2\pi) + i \sin(\theta + k \cdot 2\pi) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad \text{C.V.D.}$$

- Le radici n-esime di un numero complesso diverso da zero sono esattamente n.** Indicate con $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$, le n radici n -esime, i rispettivi valori si ottengono applicando la seguente formula

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)}, \quad \text{con } k=0, 1, 2, \dots, n-1.$$

*** **

Ciò premesso, le radici cubiche del numero complesso in oggetto sono tre. Per ottenerle scriviamo il numero complesso in forma esponenziale, avendo cura di scrivere il numero complesso facendo comparire esplicitamente la **periodicità 2π nel fattore esponenziale**. Quindi: $-2+2i = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4} + 2\pi i}$.

Le radici cubiche del generico numero complesso $z = \rho \cdot e^{i\theta + 2\pi i}$ si ottengono dalla seguente formula

$$w_k = \sqrt[3]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)}, \quad \text{con } k=0, 1, 2.$$

Nel caso in esame risulta:

$$w_k = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{3 \cdot 4} + k \cdot \frac{2\pi}{3}\right)}, \quad \text{con } k=0, 1, 2.$$

I valori delle radici cubiche sono

$$w_0 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{3\pi}{3 \cdot 4} + 0 \cdot \frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = 2^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 3}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1+i$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{11\pi}{12}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right)$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{4} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{19\pi}{12}} = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) \right)$$

Rappresentazione delle radici cubiche nel piano di Argand-Gauss

Utilizziamo il software GeoGebra per la costruzione della figura.

Le radici cubiche del numero complesso $z = -2 + 2i$ hanno modulo $\rho = \sqrt{2}$, quindi si trovano sulla circonferenza λ avente centro nell'origine $O(0;0)$ e raggio $r = \rho$. La circonferenza λ è rappresentata in Figura 1 con stile tratteggiato.

Procediamo con la rappresentazione dei punti complessi w_0, w_1, w_2 , inserendo le corrispondenti coordinate cartesiane.

Al numero complesso $w_0 = 1 + i$ corrisponde il punto

$w_0(1;1)$.

Al numero complesso $w_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right)$

corrisponde il punto $w_1\left(\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{12}\right); \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right)$.

Al numero complesso $w_2 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) \right)$

corrisponde il punto $w_2\left(\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right); \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$.

Si noti che il triangolo $w_0w_1w_2$ è equilatero.

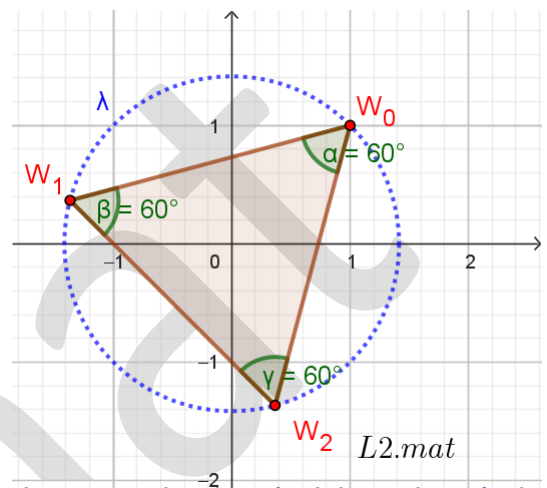


Figura 1- I punti corrispondenti ai numeri complessi w_0, w_1, w_2 , radici cubiche del numero $z = -2 + 2i$, sono i vertici w_0, w_1, w_2 del triangolo equilatero inscritto nella circonferenza λ di centro l'origine O e raggio $\rho = \sqrt{2}$ nel piano cartesiano xOy .