Nota teorica[1]

Dalla radice n-esima di un numero reale alle radici n-esime di un numero complesso

Definizione nel campo reale R

Sia x un qualsiasi numero reale ed n un numero naturale positivo. Sussiste la seguente

Definizione -Si dice radice ennesima (n-esima) di x e si indica con $\sqrt[n]{x}$ il numero reale w, se esiste, tale che la sua potenza ennesima sia uguale ad x. Quindi

$$\begin{pmatrix} x \in R, n \in N_0 \\ \sqrt[n]{x} = w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(w^n = x \right) \qquad (1)$$

essendo $N_0 = \{1, 2, 3, \ldots\}$ l'insieme dei numeri naturali positivi.

E' evidente che:

- se x=0 risulta w=0 per ogni $n \in N_0$;
- **se n è dispari**, per ogni numero reale x esiste un solo numero reale w concorde con x che verifica la (1);
- **se n è pari**, poiché per ogni numero reale w la potenza w^n è positiva, dovendo sussistere l'uguaglianza $w^n = x$, si deduce che x deve essere positivo, quindi **la radice n-esima di indice pari esiste solo per i numeri positivi**. D'altra parte, con n pari, per i due numeri opposti w, $-w$ risulta $w^n = (-w)^n = x$, quindi esistono in R due numeri che verificano la (1); con il simbolo $\sqrt[n]{x}$ si intenderà il numero positivo w che soddisfa la (1), mentre si riterrà valida l'uguaglianza $-\sqrt[n]{x} = -w$.

Definizione nel campo complesso C

Sia z un qualsiasi numero complesso ed n un numero naturale positivo. Sussiste la seguente

Definizione -Si dice radice ennesima di z e si indica con $\sqrt[n]{z}$ ogni numero complesso w tale che la sua potenza ennesima sia uguale ad z. Quindi

$$\begin{pmatrix} z \in C, n \in N_0 \\ \sqrt[n]{z} = w \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left(w^n = z \right) \qquad (2)$$

Anche in questo caso , con $n \in N_0$ risulta $\sqrt[n]{0} = 0$, mentre, come vedremo tra breve, per $z \neq 0$ esistono n numeri complessi distinti $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ la cui potenza n-esima è uguale a z.

Per provare l'affermazione sull'esistenza di n radici ennesime di $z \neq 0$ ricordiamo che per ogni numero complesso z, la cui **forma algebrica** sia

$$z = a + ib\,, \qquad (3)$$

[1] Confrontare anche il documento "Note teoriche sui numeri complessi. Formula di Moivre. Calcoli di radici n-esime di numeri complessi" link, pubblicato il 10-05-2015.

con a e b numeri reali,

sussiste la **forma trigonometrica**

$$z = \rho(\cos\theta + i sen\theta), \quad (4)$$

nella quale ρ è il modulo del numero complesso definito dalla relazione

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (5)$$

e θ è l'**argomento principale** (detto anche **anomalia)** del numero complesso, espresso in radianti, appartenente al primo giro $[0;2\pi[$, o, equivalentemente nel sistema sessagesimale, $0° \le \theta < 360°$, univocamente determinato dalle due relazioni

$$\cos\theta = \frac{a}{\rho} \wedge sen\theta = \frac{b}{\rho} \quad (6)$$

Osserviamo che dalla periodicità delle funzioni $sen\theta$, $\cos\theta$, pari a 2π, per ogni numero complesso non nullo z si potrebbe scrivere l'uguaglianza

$$z = \rho\left[\cos(\theta + 2k\pi) + i sen(\theta + 2k\pi)\right], \ \forall k \in Z \quad (7)$$

essendo Z l'insieme dei numeri interi relativi $Z = \{0,1,-1,2,-2,3,-3,...\}$. Ciò premesso, **due numeri complessi z_1, z_2 sono uguali se e solo se hanno lo stesso modulo ed uguali i loro argomenti principali**.

Forma esponenziale di un numero complesso

Nelle operazioni con i numeri complessi spesso si utilizza la forma esponenziale del numero complesso $z = a + ib$ che è la seguente

$$z = \rho \cdot e^{i\theta}, \text{ dove } e^{i\theta} = \cos\theta + i sen\theta, \quad (8)$$

Facciamo notare che sussiste l'uguaglianza

$$e^{i\theta + k\cdot 2\pi i} = e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta}, \forall \theta \in R, k \in Z \quad (9)$$

per cui la funzione esponenziale nel campo complesso $e^{i\theta}$ è periodica di periodo $T = 2\pi i$.

Prodotto di due qualsiasi numeri complessi e formula di Moivre

Siano $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i sen\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i sen\theta_2)$ due qualsiasi numeri complessi non nulli. Vogliamo provare che sussiste la seguente

Proprietà per il prodotto $z_1 \cdot z_2$ di due numeri

Il prodotto di due numeri complessi è il numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per anomalia la somma delle anomalie dei due numeri complessi. In simboli

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i sen(\theta_1 + \theta_2)\right] \quad (10)$$

Osservazione - Se la somma $\theta_1+\theta_2$ supera 2π si considererà come anomalia del prodotto l'angolo $\theta=\theta_1+\theta_2-2\pi$.

Per provare l'uguaglianza (10) basta eseguire il prodotto dei numeri complessi scritti nelle rispettive forme trigonometriche e tener conto delle formule di addizione[2] per le funzioni senθ e cosθ.

Calcoliamo il prodotto dei due numeri complessi.

$$z_1\cdot z_2=\rho_1(\cos\theta_1+isen\theta_1)\cdot\rho_2(\cos\theta_2+isen\theta_2)=\rho_1\cdot\rho_2\cdot\left[(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2+i\cos\theta_1 sen\theta_2)+(isen\theta_1\cos\theta_2+i^2sen\theta_1 sen\theta_2)\right]=$$
$$\rho_1\cdot\rho_2\cdot\left[(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2-sen\theta_1 sen\theta_2)+i(sen\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1 sen\theta)\right]=\rho_1\cdot\rho_2\cdot\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\cdot sen(\theta_1+\theta_2)\right]$$ C.V.D.

In particolare, applicando la proprietà del prodotto di due numeri complessi al **quadrato di un numero complesso**, con $z=\rho(\cos\theta+isen\theta)$ si ottiene

$$z^2=\rho(\cos\theta+isen\theta)\cdot\rho(\cos\theta+isen\theta)=\rho^2\cdot\left[\cos(\theta+\theta)+isen(\theta+\theta)\right]=\rho^2\cdot\left[\cos(2\theta)+isen(2\theta)\right]$$

quindi

$$z^2=\rho^2\cdot\left[\cos(2\theta)+isen(2\theta)\right] \qquad (11)$$

Iterando il procedimento applicato per il calcolo di z^2 alle potenze successive z^3, z^4, … , z^n, con n intero positivo, si ottengono le espressioni seguenti

$z^3=z^2\cdot z=\rho^2\cdot\left[\cos(2\theta)+isen(2\theta)\right]\cdot\rho(\cos\theta+isen\theta)=\rho^3\cdot\left[\cos(3\theta)+isen(3\theta)\right]$, **per il cubo**,

$z^4=z^3\cdot z=\rho^3\cdot\left[\cos(3\theta)+isen(3\theta)\right]\cdot\rho(\cos\theta+isen\theta)=\rho^4\cdot\left[\cos(4\theta)+isen(4\theta)\right]$, **per la quarta potenza**,

…

e per **n naturale** maggiore di 2, l'espressione per la **potenza n-esima z^n**

$$z^n=z^{n-1}\cdot z=\rho^{n-1}\cdot\left[\cos((n-1)\theta)+isen((n-1)\theta)\right]\cdot\rho(\cos\theta+isen\theta)=\rho^n\cdot\left[\cos((n-1+1)\theta)+isen((n-1+)\theta)\right]=$$
$$\rho^n\cdot\left[\cos(n\theta)+isen(n\theta)\right],$$

dunque la formula

$$z^n=\rho^n\cdot\left[\cos(n\theta)+isen(n\theta)\right] \qquad (12)$$

L'uguaglianza (12) è conosciuta come la **formula di Moivre**.

Tenendo conto della forma esponenziale per un numero complesso si può anche scrivere la seguente espressione per la potenza z^n

[2] Ricordiamo che sussistono le seguenti **formule di addizione per** le funzioni **sen(*x*)** e **cos(*x*)** per la cui dimostrazione si rinvia ad un qualsiasi testo di goniometria:
$sen(\alpha+\beta)=sen(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sen(\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)cos(\beta)-sen(\alpha)sen(\beta)$
ed in particolare con α=β si ottengono per le stesse funzioni le seguenti **formule di duplicazione**
$sen(2\alpha)=2sen(\alpha)cos(\alpha)$, $\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)$.

$$z^n = \rho^n \cdot e^{i \cdot n\theta} \qquad , \forall n \in N_0 \qquad (12.1)$$

Approfondimento per la formula di Moivre per le potenze con esponente intero negativo di un numero complesso non nullo

Con $z = a + ib = \rho(\cos\theta + isen\theta)$ numero complesso non nullo ed n un numero naturale positivo possiamo provare che sussistono anche le seguenti uguaglianze

$$z^{-n} = \rho^{-n} \cdot \left[\cos(-n\theta) + isen(-n\theta)\right] = \rho^{-n} \cdot e^{i \cdot (-n)\theta} \qquad (13)$$

che esprimono l'estensione della formula di Moivre per le potenze con esponente negativo.

Infatti, ricordato che il coniugato di $z = a + ib$ è $\bar{z} = a - ib$ e che risulta

$$z \cdot \bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = \rho^2 \ , \qquad (14)$$

possiamo riconoscere che $z = a + ib$ **ammette il reciproco**, indicato con z^{-1}, che è il numero

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2} \qquad \text{(reciproco di z)} \qquad (15)$$

perché il prodotto $z \cdot z^{-1} = 1$, essendo 1 l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione (in R come in C); inoltre si verifica che il reciproco di $z = a + ib \neq 0$ ha come modulo il reciproco del modulo di z

$$\left|z^{-1}\right| = \frac{1}{|z|} \qquad (16)$$

Dimostrazioni -Si ha

$$z \cdot z^{-1} = (a+ib) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{iab}{a^2+b^2} + \frac{iab}{a^2+b^2} - \frac{i^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{(-1)b^2}{a^2+b^2} = 1$$

Per provare la (16) osserviamo che

$$\left|z^{-1}\right| = \sqrt{\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{\left(a^2+b^2\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{|z|} \qquad \text{C.V.D.}$$

Indicando z^{-1} con la frazione $\frac{1}{a+ib}$ si può osservare che sussistono le seguenti uguaglianze algebriche

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \cdot \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2-(ib)^2} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{ib}{a^2+b^2} \qquad (15.1)$$

Utilizzando la forma trigonometrica per $z = a + ib \neq 0$ possiamo ricavare la forma trigonometrica per z^{-1}.

$$z^{-1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + isen\theta)} = \frac{1}{\rho(\cos\theta + isen\theta)} \cdot \frac{\cos\theta - isen\theta}{\cos\theta - isen\theta} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\cos\theta - isen\theta}{\cos^2\theta + sen^2\theta} = \frac{1}{\rho} \cdot (\cos\theta - isen\theta)$$

e poiché cos(-θ)=cos(θ) e sen(-θ)=-sen(θ) per ogni θ∈R possiamo ancora scrivere

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho} \cdot \left[\cos(-\theta) + isen(-\theta)\right] = \rho^{-1}\left[\cos(-\theta) + isen(-\theta)\right] \qquad (15.2)$$

quindi anche

$z^{-1}=\rho^{-1}\cdot e^{-i\theta}$, forma esponenziale (15.3)

Per quanto concerne la potenza con esponente intero negativo del numero complesso $z=a+ib\neq 0$,

possiamo osservare che

$$z^{-n}=\left(\frac{1}{z}\right)^n=\left(z^{-1}\right)^n=\left\{\rho^{-1}\cdot\left[\cos(-\theta)+isen(-\theta)\right]\right\}^n=\rho^{-n}\cdot\left[\cos(-n\theta)+isen(-n\theta)\right]=\rho^{-n}\cdot e^{i\cdot(-n)\theta}$$ C.V.D.

Determinazione delle radici n-esime di z

Occupiamoci ora della determinazione delle radici n-esime di un numero complesso.

Considerato il numero complesso $z=\rho(\cos\theta+i\cdot sen\theta)$, con radici ennesime di z, indicate con il simbolo $\sqrt[n]{z}$, si intendono tutti i numeri complessi w la cui potenza n-esima coincide con z; quindi, se $w=\rho'(\cos\varphi+i\cdot sen\varphi)$, risulterà

$$\sqrt[n]{z}=w,$$

se e solo se è soddisfatta l'uguaglianza

$$w^n=z,$$

e dunque, per la formula di Moivre, se e solo se è soddisfatta l'uguaglianza

$$(\rho')^n\left(\cos(n\varphi)+i\cdot sen(n\varphi)\right)=\rho(\cos\theta+i\cdot sen\theta) \qquad (17)$$

Abbiamo precisato sopra che due numeri complessi coincidono se e solo se hanno lo stesso modulo e i loro argomenti sono uguali o differiscono per multipli interi di 2π, dunque la (17) è soddisfatta se e solo se risulta

$(\rho')^n=\rho$, quindi $\rho'=\rho^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\rho}$ e (17.1)

$n\varphi=\theta+2k\pi$, da cui $\varphi=\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}$, con $k\in Z$. (17.2)

Le radici n-esime di z hanno dunque la seguente forma trigonometrica

$$w_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot sen\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \qquad (18)$$

Quante sono le radici n-esime di z?

Dalla (18) si evince che la prima radice si ottiene per k=0 ed è

$$w_0=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+i\cdot sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$$

Il punto P_0 corrispondente a w_0 nel piano complesso di Gauss[3] si trova sulla circonferenza γ avente centro nell'origine O degli assi, raggio $r=\sqrt[n]{\rho}$, con il raggio OP_0 che forma con il semiasse positivo reale l'angolo θ/n.

La successiva radice n-esima si ottiene per k=1, ed è

$$w_1=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot sen\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)\right);$$

il punto P_1 corrispondente a w_1 nel piano di Gauss si trova ancora sulla stessa circonferenza γ, con il raggio OP_1 che forma con il semiasse positivo reale l'angolo $\frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}$, maggiore di $\frac{2\pi}{n}$ rispetto all'argomento di w_0. Procedendo con i valori successivi di k si deduce che si ottengono numeri complessi diversi con

$k=0,1,3,..,n-1$

Per k=*n* il numero complesso che si ottiene coincide con w_0. Infatti,

$$w_n=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+n\cdot\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot sen\left(\frac{\theta}{n}+n\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right)=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)+i\cdot sen\left(\frac{\theta}{n}+2\pi\right)\right)=$$
$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+i\cdot sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)\equiv w_0$$

Concludiamo che **le radici n-esime di un numero complesso diverso da zero sono *n*** e sono disposte sulla circonferenza γ avente centro nell'origine degli assi e raggio $r=\sqrt[n]{\rho}$, con i rispettivi punti coincidenti con i vertici dell'n-agono regolare inscritto nella circonferenza il cui primo vertice è quello corrispondente alla radice n-esima $w_0=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right)+i\cdot sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$.

In sintesi si indica l'insieme delle radici n-esime di $z=\rho(\cos\theta+i\cdot sen\theta)$ con la formula seguente

$$w_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\cdot sen\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right),\ \text{con}\ k=0,1,2,..,n-1 \quad (19)$$

e quindi anche per la forma esponenziale delle radici n-esime si ha

$$w_k=\rho^{\frac{1}{n}}e^{i\cdot\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)},\ \text{con}\ k=0,1,2,...,n-1 \quad (20)$$

Considerazione conclusiva

Abbiamo precisato che le radici n-esime distinte di un numero complesso $z\neq 0$ sono esattamente n. Questa proprietà implica il rispetto di una ben precisa procedura di calcolo nelle operazioni da mettere in atto allorquando si devono determinare i valori dell'espressione $\sqrt[n]{z^m}$, con n ed m interi non primi tra loro.

[3] Si dice anche <<piano complesso di Argand-Gauss>>.

La corretta esecuzione delle operazioni richiede che del numero complesso z si esegua prima la potenza z^m e successivamente si passi a determinare le ardici n-esime del risultato ottenuto e ciò perché l'eventuale semplificazione dei fattori comuni tra m ed n comporterebbe la perdita di alcune delle radici n-esime del numero complesso z^m .

Esempio

A chiarimento di quanto precisato supponiamo che si debbano determinare le radici quarte di z=(1+i)^2, dunque calcolare $\sqrt[4]{(1+i)^2}$.

Il procedimento corretto è il seguente

1. Eseguire il calcolo della potenza che figura nel radicando: $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i-1 = 2i = z'$
2. Scrivere il risultato ottenuto sotto forma trigonometrica (o esponenziale):

   modulo$\rightarrow \rho' = |z'| = |2i| = 2$; anomalia$\rightarrow \theta' = \frac{\pi}{2}$; forma trigonometrica$\rightarrow z' = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i sen\frac{\pi}{2}\right)$
3. Applicare la formula (19) per il calcolo delle quattro radici quarte

   $w_k = \sqrt[4]{\rho'}\left(\cos\left(\frac{\theta'}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\theta'}{4} + k\frac{2\pi}{4}\right)\right) = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right)\right)$, con k=0, 1, 2, 3.

   I valori che si ottengono sono:

   $$w_0 == \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8}\right)\right);$$

   $$w_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-sen\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right);$$

   $$w_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8} + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8}\right)\right);$$

   $$w_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8} + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(sen\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Il procedimento che segue è errato

1. Eseguire la semplificazione dell'espressione radicale $\sqrt[4]{(1+i)^2} = \sqrt{1+i}$
2. Calcolare le due radici quadrate del numero complesso $z" = 1+i$

   modulo$\rightarrow \rho" = |1+i| = \sqrt{2}$; anomalia$\rightarrow \theta" = \frac{\pi}{4}$; forma trigonometrica$\rightarrow z" = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$
3. Applicare la formula (19) per le radici quadrate

   $w"_k = \sqrt{\rho"}\left(\cos\left(\frac{\theta"}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\theta"}{2} + k\frac{2\pi}{2}\right)\right)$, con k=0, 1.

   Si ottengono i valori:

   $$w"_0 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8}\right)\right);$$

   $$w"_1 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right) + i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8} + \pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\cdot sen\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$$

Come si vede con questo procedimento sono stati ottenuti solo due valori numerici, il primo dei quali coincidente con w_0, il secondo coincidente con w_2; mancano le altre due radici quarte: la w_1 e w_3.