Risoluzione di equazioni nel campo complesso[1]

1) $2z+\bar{z}=2+i$ — Ris. $\frac{2}{3}+i$

2) $|z|^2\cdot\bar{z}=1$ — Ris. 1

3) $z^4+1=0$ — Ris. $\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) $(z-2)^3+i=0$ rappresentare le radici nel piano di Argand-Gauss

Ris. $2+i$; $2-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$; $2+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

5) $z^2+(1+i)z+i=0$ — Ris. $-\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)$

6) $z^3+z^2+8z+8=0$ — Ris. -1 ; $-2\sqrt{2}i$; $2\sqrt{2}i$

7) $z+2z^{-1}=1$ — Ris. $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$; $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i$

8) $iz^2=\bar{z}$ — Ris. 0 ; i ; $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

Soluzioni

1) Considerata la forma algebrica del numero complesso $z=x+iy$, con x ed y reali, e ricordato che il coniugato di z è $\bar{z}=x-iy$, imponiamo che z e $\bar{z}$ verifichino l'equazione.

Si ottiene l'equazione $(x+iy)+x-iy=2+i$, che deve essere soddisfatta al variare di x ed y in R. Poiché due numeri complessi sono uguali se e solo se hanno uguale la parte reale ed uguali i coefficienti della parte immaginaria, x ed y devono soddisfare il seguente sistema

$\begin{cases}3x=2\\ y=1\end{cases}$, da cui si seduce che l'unica soluzione dell'equazione è $z=\frac{2}{3}+i$.

2) $|z|^2\cdot\bar{z}=1$ Utilizzando l'espressione del modulo e la forma algebrica del numero complesso si ottiene la seguente equazione

$(x^2+y^2)(x-iy)=1\rightarrow(x^2+y^2)x-i(x^2+y^2)y=1$.

Imponendo l'uguaglianza tra i due membri si ricava il seguente sistema di equazioni

$\begin{cases}(x^2+y^2)x=1\\ (x^2+y^2)y=0\end{cases}$, equivalente all'unione logica dei due seguenti

2.1) $\begin{cases}(x^2+y^2)x=1\\ (x^2+y^2)=0\end{cases}$, 2.2) $\begin{cases}(x^2+y^2)x=1\\ y=0\end{cases}$

[1] Per i riferimenti teorici consultare il mio lavoro Note teoriche sui numeri complessi

Si riconosce che il sistema 2.1 non ha alcuna soluzione, mentre il sistema 2.2 ammette come soluzione x=1, y=0. Concludiamo che l'equazione in esame ammette l'unica soluzione z=1.

3) $z^4+1=0$

Scrivendo l'equazione nella forma equivalente $z^4=-1$, si riconosce che la stessa ammette come soluzioni le radici quarte del numero -1. Quindi $z=\sqrt[4]{-1}$.

Occorre scrivere il numero -1 in forma trigonometrica; si ha: $-1=1(\cos\pi+isen\pi)$.

I valori delle quattro radici si ottengono dalla formula seguente

$$w_k=\sqrt[4]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)+isen\left(\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}\right)\right)$$, con $k=0,1,2,3$

Le quattro radici quarte cercate sono

$$w_0=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$w_1=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+isen\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+isen\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_2=\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)+isen\left(\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-isen\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$w_3=\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)+isen\left(\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-isen\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Approfondimento

Forniamo una risoluzione diversa dell'equazione sfruttando le regole del calcolo letterale.

$$z^4+1=0\rightarrow\left(z^4+1+2z^2\right)-2z^2=0\rightarrow\left(z^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}z\right)^2=0\rightarrow\left(z^2+\sqrt{2}z+1\right)\left(z^2-\sqrt{2}z+1\right)=0\rightarrow$$
$$\left(z^2+\sqrt{2}z+1=0\right)\vee\left(z^2-\sqrt{2}z+1=0\right)$$

A questo punto basta risolvere le due equazioni di secondo grado per ottenere le quattro radici complesse.

$$z^2+\sqrt{2}z+1=0\rightarrow z=\frac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{-2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z^2-\sqrt{2}z+1=0\rightarrow z=\frac{\sqrt{2}}{2}\pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

4) $(z-2)^3+i=0\rightarrow z-2=\sqrt[3]{-i}\rightarrow z=2+\sqrt[3]{-i}$

L'equazione in esame ammette tre radici i cui valori si ottengono sommano al 2 le radici cubiche di $-i$. Per queste ultime, considerato che la forma trigonometrica di $-i$ è

$-i=\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right)+isen\left(\frac{3}{2}\pi\right)$, i tre valori sono

$u_0=\cos\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{3}\right)+isen\left(\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{3}\right)=i$,

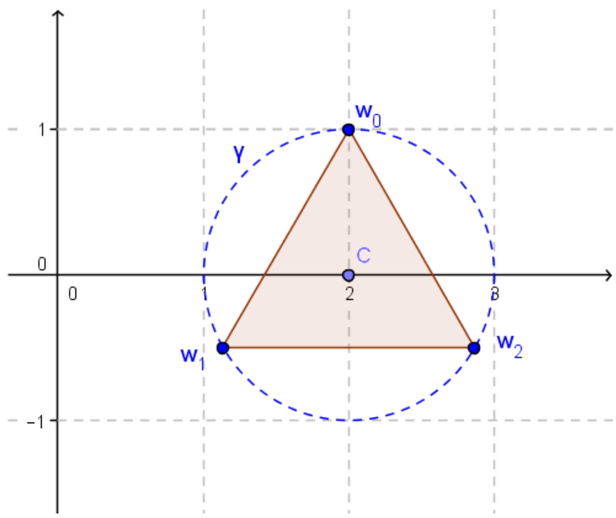
$u_1=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+isen\left(\frac{7\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

$u_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)+isen\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

Concludiamo che le soluzioni dell'equazione in esame sono

$w_0=2+u_0=2+i$, $w_1=2+u_1=2-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$,

$w_2=2+u_2=2+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.



Rappresentazione delle radici nel piano complesso di Argand-Gauss

Le radici sono disposte ai vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di centro C(2;0) e raggio unitario.

5) $z^2+(1+i)z+i=0$

Utilizziamo la forma algebrica $z=x+iy$ e sviluppiamo i calcoli per separare nel primo membro dell'equazione la parte algebrica da quella immaginaria. Si ha

$$(x+iy)^2+(1+i)(x+iy)+i=0\rightarrow x^2+2ixy-y^2+x+iy+ix-y+i=0\rightarrow$$
$$(x^2-y^2+x-y)+i(2xy+x+y-1)=0$$

I numeri complessi z radici dell'equazione in oggetto devono avere x ed y reali tali che la coppia (x;y) sia soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases}x^2-y^2+x-y=0\\2xy+x+y-1=0\end{cases}$$

Il sistema è di quarto grado. Si può fattorizzare il primo membro della prima equazione, quindi applicare la legge di annullamento del prodotto per trasformare il sistema nell'unione logica di due sistemi di secondo grado.

$$\begin{cases}(x-y)(x+y+1)=0\\2xy+x+y-1=0\end{cases}$$

Il sistema si spezza nei due seguenti sistemi

a) $\begin{cases} x-y=0 \\ 2xy+x+y-1=0 \end{cases}$, b) $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2xy+x+y-1=0 \end{cases}$

Risolvendo il sistema a) si trovano le soluzioni $\begin{cases} x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \\ y=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2} \end{cases}$;

il sistema b) non ha soluzioni reali.

Si conclude che l'equazione complessa ha come radici $z_1=-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$, $z_2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1+i)$.

6) $z^3+z^2+8z+8=0$

Per la risoluzione dell'equazione si può fattorizzare il primo membro e ricondursi a due equazioni: una di primo grado e una di secondo grado.

$z^2(z+1)+8(z+1)=0 \to (z+1)(z^2+8)=0 \to (z+1=0)\vee(z^2+8=0) \to (z=-1)\vee\left(z=\pm 2\sqrt{2}i\right)$.

Si conclude che le radici dell'equazione sono: $z_1=-1$; $z_2=2\sqrt{2}i$; $z_2=-2\sqrt{2}i$.

7) $z+2z^{-1}=1$

Per la risoluzione scrivere il numero z nella forma algebrica e procedere come per l'equazione n.5; si ottengono due sistemi di equazioni dei quali uno non ha soluzioni reali e l'altro ne ammette due.

Le radici dell'equazione sono: $z_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$; $z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{7}}{2}i$.

8) $iz^2=\bar{z}$

Passare alla forma algebrica per il numero complesso z e procedere come per risoluzione dell'equazione n.5. Si ottengono due sistemi di equazioni dai quali si ricavano le seguenti quattro radici per l'equazione in oggetto: $z_1=0$; $z_2=i$; $z_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$; $z_4=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$;