Note teoriche sui numeri complessi

Per ogni numero complesso

$z = x + iy$, con x ed y reali, (1)

il numero complesso coniugato è

$\bar{z} = x - iy$,

ed il **modulo** è $|z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. (2)

L'espressione (1) del numero complesso z è detta **forma algebrica**.

Forma trigonometrica del numero complesso $z = x + iy$

$z = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta)$, con $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho}$, $sen\theta = \dfrac{y}{\rho}$ e $0 \le \theta < 2\pi$. (3)

L'angolo θ è detto **anomalia** o **argomento principale** del numero complesso z.

Evidentemente sussiste l'uguaglianza

$z = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta) = \rho(\cos(\theta + 2k\pi) + i \cdot sen(\theta + 2k\pi))$, ∀k∈Z. (4)

Forma esponenziale

$z = \rho \cdot e^{i\theta}$ (5)

dove ρ e θ sono definiti rispettivamente dalla (2) e dalle relazioni (3).

*** ***

Regole

1) Il **prodotto di due numeri complessi** è il numero complesso avente per modulo il prodotto dei moduli e per argomento la somma degli argomenti. Pertanto, se sono note le forme trigonometriche dei numeri complessi:

   $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$,

   risulta $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2))$. (6)

   La *dimostrazione* della (6) si consegue eseguendo i prodotti nell'espressione $z_1 \cdot z_2 = \rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1) \cdot \rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)$

   e tenendo presenti le formule di addizione del seno e del coseno

   $sen(\theta_1 + \theta_2) = sen\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + \cos\theta_1 \cdot sen\theta_2$, $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - sen\theta_1 \cdot sen\theta_2$, nonché l'uguaglianza $i^2 = -1$.

Si può applicare la formula (6) al caso particolare che i due numeri complessi siano coincidenti; in questo caso, con $z = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta)$, si ha

$$z^2 = \rho(\cos(2\theta) + i \cdot sen(2\theta)) \qquad (6.1)$$

Si estende facilmente la (6.1) al caso generale della potenza *n*-esima di un numero complesso. Risulta

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta)),\ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (7)$$

La formula (7) è conosciuta come **regola di Moivre** (o di De Moivre).

2) Il **quoziente di due numeri complessi** z_1, z_2, con $z_2 \neq 0$, è il numero complesso avente per modulo il quoziente dei moduli e per argomento la differenza tra l'argomento del primo e l'argomento del secondo. Note le forme trigonometriche dei numeri complessi sussistono le uguaglianze

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\theta_1 + i \cdot sen\theta_1)}{\rho_2(\cos\theta_2 + i \cdot sen\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 - \theta_2)) \qquad (8)$$

La *dimostrazione* si consegue moltiplicando numeratore e denominatore della frazione per $(\cos\theta_2 - i \cdot sen\theta_2)$ e tenendo presenti le formule goniometriche per la differenza di due angoli

$$sen(\theta_1 - \theta_2) = sen\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \cdot sen\theta_2,\quad cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 + sen\theta_1 \cdot sen\theta_2.$$

3) Come caso particolare della (8) si ricava l'espressione del reciproco di un numero complesso z≠0.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = 1 : z = 1(\cos 0 + i \cdot sen0) : (\rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta)) = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i \cdot sen(-\theta)) \qquad (9)$$

4) **Potenza con esponente intero negativo** di un numero complesso diverso da zero

Come applicazione della formula di Moivre e della (9) si deduce che

$$z^{-n} = \frac{1}{\rho^n}(\cos(-n\theta) + i \cdot sen(-n\theta)),\quad \forall z \neq 0 \wedge \forall n \in \mathbb{Z} \qquad (10)$$

Evidentemente, per ottenere l'argomento principale di z^{-n} si sommerà all'argomento ($-n\theta$) un opportuno multiplo dell'angolo giro.

5) Radici ennesime di un numero complesso

Dato il numero complesso $z = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta)$, con radici ennesime di z, indicate con il simbolo $\sqrt[n]{z}$, si intendono tutti i numeri complessi w la cui potenza n-esima coincide con z.

In simboli, se $w = \rho'(\cos\varphi + i \cdot sen\varphi)$, sarà

$\sqrt[n]{z} = w$, se e solo se è soddisfatta l'uguaglianza

$w^n = z$, quindi, per la formula di Moivre, se e solo se è soddisfatta l'uguaglianza

$$(\rho')^n \left(\cos(n\varphi) + i \cdot sen(n\varphi)\right) = \rho(\cos\theta + i \cdot sen\theta) \qquad (11)$$

Teniamo ora presente che due numeri complessi coincidono se e solo se hanno lo stesso modulo e argomenti uguali o che differiscono per multipli interi di 2π, dunque la (11) è soddisfatta se e solo se risulta

$(\rho')^n = \rho$, quindi $\rho' = \rho^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\rho}$ e (11.1)

$n\varphi = \theta + 2k\pi$, da cui $\varphi = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$, con $k \in Z$. (11.2)

Le radici n-esime di z hanno dunque la seguente forma trigonometrica

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right) \qquad (12)$$

Quante sono le radici n-esime di z?

Dalla (12) si evince che la prima radice si ottiene per k=0 ed è

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$$

Il punto P_0 corrispondente nel piano complesso di Gauss si trova sulla circonferenza γ avente centro nell'origine O degli assi, raggio $r = \sqrt[n]{\rho}$, con il raggio OP_0 che forma con il semiasse positivo reale l'angolo θ/n.

La successiva radice n-esima si ottiene per k=1, ed è

$$w_1 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right);$$

il punto P_1 corrispondente nel piano di Gauss si trova ancora sulla stessa circonferenza γ, con il raggio OP_1 che forma con il semiasse positivo reale l'angolo $\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$, maggiore di $\frac{2\pi}{n}$ rispetto all'argomento di w_0. Procedendo con i valori successivi di k si deduce che si ottengono numeri complessi diversi con

$k = 0,1,3,..,n-1$

Per k=*n* il numero complesso che si ottiene coincide con w_0. Infatti,

$$w_n = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + n\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + n\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + 2\pi\right)\right) =$$
$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right) \equiv w_0$$

Concludiamo che le radici n-esime di un numero complesso diverso da zero sono *n* e sono disposte sulla circonferenza γ avente centro nell'origine degli assi e raggio $r = \sqrt[n]{\rho}$, con i rispettivi punti coincidenti con i vertici dell'n-agono regolare inscritto nella circonferenza il cui primo vertice è quello corrispondente alla radice n-esima $w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$.

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right), \text{ con } k = 0,1,2,..,n-1 \qquad (13)$$

Due esempi

1) Le radici seste di $z = i$

La forma trigonometrica del numero complesso è $i = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Le radici $\sqrt[6]{i}$ si ottengono dalla formula

$$w_k = \sqrt[6]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2\cdot 6} + k\frac{2\pi}{6}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{2\cdot 6} + k\frac{2\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}\right), \text{ con } k = 0,1,2,..,5.$$

Le radici seste $\sqrt[6]{i}$ sono

$$w_0 = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{12}\right),$$

$$w_1 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$w_2 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$w_3 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} + \pi\right),$$

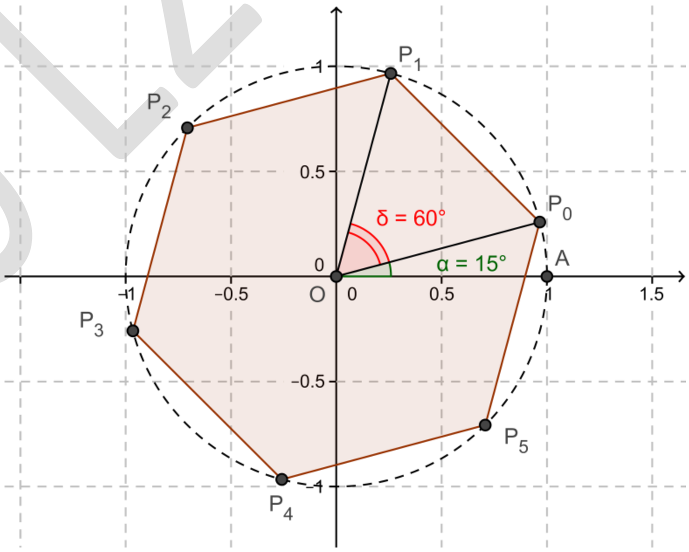

Figura 1

$$w_4 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$w_5 = \cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}\right).$$

In Figura 1 sono rappresentati nel piano complesso i punti P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 corrispondenti alle sei radici seste w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5. I punti indicati sono i vertici dell'esagono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. Il raggio relativo al primo punto forma con il semiasse positivo reale un angolo di ampiezza 15°=π/12 rad.

2) Le radici decime dell'unità: $\sqrt[10]{1}$

L'espressione trigonometrica dell'unità è $1=\cos 0+i\cdot\sin 0$ e le relative radici decime si deducono dalla formula

$$w_k=\sqrt[10]{1}\left(\cos\left(\frac{0}{10}+k\frac{2\pi}{10}\right)+i\cdot sen\left(\frac{0}{10}+k\frac{2\pi}{10}\right)\right)=\cos\left(k\frac{\pi}{5}\right)+i\cdot sen\left(k\frac{\pi}{5}\right)\text{, con } k=0,1,2,..,9\,.$$

In Figura 2 sono rappresentati nel piano complesso i punti corrispondenti alle dieci radici decime dell'unità. I punti sono i vertici del decagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio unitario con centro nell'origine O(0;0) e con il primo punto P_0 di coordinate (1;0).

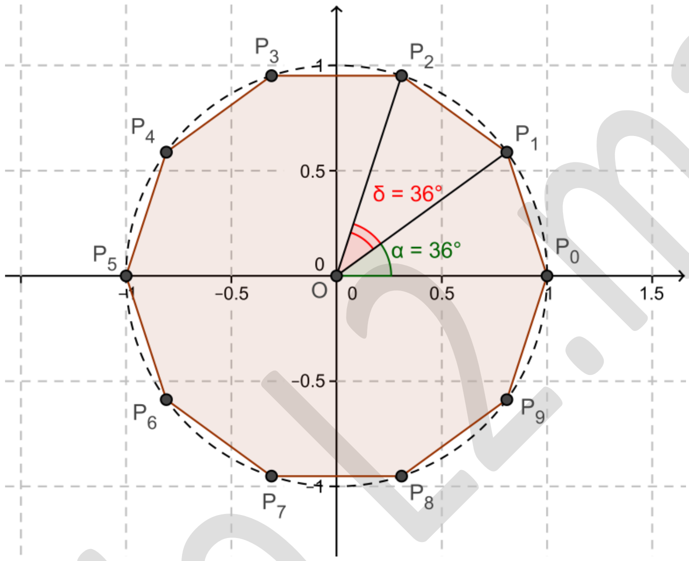

Figura 2