Esercitazione sui numeri complessi

Equazioni di secondo grado e di grado superiore a coefficienti reali

1) Calcolo di radici quadrate di numeri negativi

Calcolare le seguenti radici quadrate

$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-8}$, $\sqrt{-\frac{3}{4}}$, $\sqrt{-\frac{25}{9}}$, $\sqrt{-0,1^2+0,01^2}$

Soluzione

Considerato un numero complesso z, per radice quadrata del numero, indicata con $\sqrt{z}$, si intende un numero complesso il cui quadrato è z.

Di un qualsiasi numero complesso z diverso da zero esistono due radici quadrate che sono due numeri opposti tra loro. Ciò premesso osserviamo che

$i^2=-1$ e $(-i)^2=-1$

dunque le due radici quadrate del numero -1 sono i e $-i$. Possiamo scrivere sinteticamente

$\sqrt{-1}=\pm i$

Calcolo delle altre radici quadrate assegnate.

$\sqrt{-4}=\sqrt{4\cdot(-1)}=2\sqrt{-1}=\pm 2i$;

$\sqrt{-8}=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{-1}=\pm 2\sqrt{2}i$

$\sqrt{-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

$\sqrt{-\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}\sqrt{-1}=\pm\frac{5}{3}i$

$\sqrt{-0,1^2+0,01^2}=\sqrt{-\frac{1}{100}+\frac{1}{10000}}=\sqrt{-\frac{99}{10000}}=\frac{3\sqrt{11}}{100}\cdot\sqrt{-1}=\pm\frac{3\sqrt{11}}{100}i$

*** ***

2) Equazioni di secondo grado a coefficienti reali.

Risolvere le seguenti equazioni

a) $z^2+9=0$; b) $4z^2+1=0$; c) $z^2+\sqrt{2}=0$;

d) $z^2-4z+5=0$; e) $4z^2+(z+1)^2=0$; f) $2z^2+\sqrt{6}z+1=0$;

g) $(2z-1)^2+2=0$; h) $z^2+(3z+1)^2=0$; i) $3z^2-4z+12=0$

Soluzione

a) $z^2+9=0\rightarrow z=\sqrt{-9}=\pm 3i$

b) $4z^2+1=0 \to z^2=-\frac{1}{4} \to z=\sqrt{-\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{2}i$

c) $z^2+\sqrt{2}=0 \to z^2=-\sqrt{2} \to z=\sqrt{-\sqrt{2}}=\sqrt{\sqrt{2}\cdot(-1)}=\sqrt{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt[4]{2}(\pm i)=\pm\sqrt[4]{2}\cdot i$

d) $z^2-4z+5=0$ Applichiamo la formula risolutiva ridotta.

$z=2\pm\sqrt{4-5}=2\pm\sqrt{-1}=2\pm i$

e) $4z^2+(z+1)^2=0 \to 5z^2+2z+1=0 \to z=\frac{-1\pm\sqrt{1-5}}{5}=\frac{-1\pm 2i}{5} \to z_1=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\,;\ z_2=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i$

f) $2z^2+\sqrt{6}z+1=0 \to z=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{6-8}}{4}=\frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{2}i}{4} \to z_1=-\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}i\,;\ z_2=-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i$.

g) $(2z-1)^2+2=0 \to 2z-1=\pm\sqrt{-2} \to 2z=1\pm i\sqrt{2} \to z_1=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\ z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

h) $z^2+(3z+1)^2=0 \to 10z^2+6z+1=0 \to z=\frac{-3\pm\sqrt{9-10}}{10}=\frac{-3\pm i}{10} \to z_1=-\frac{3}{10}-\frac{1}{10}i\,;\ z_2=-\frac{3}{10}+\frac{1}{10}i$

i) $3z^2-4z+12=0 \to z=\frac{2\pm\sqrt{4-36}}{3}=\frac{2\pm 4i\sqrt{2}}{3} \to z_1=\frac{2}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}i\,;\ z_2=\frac{2}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}i$

*** ***

3) Equazioni di grado superiore al secondo a coefficienti reali.

Risolvere le seguenti equazioni

a) $z^3+8=0$ b) $2z^4+3z^2-2=0$ c) $z^4+3z^2+4=0$

d) $z^4+2z^2+9=0$ e) $16z^4-24z^2+25=0$

Soluzione

a) Si può risolvere l'equazione scomponendo in fattori la somma di due cubi e procedendo applicando la legge di annullamento del prodotto. Si ha

$z^3+8=0 \to (z+2)(z^2-2z+4)=0$, da cui $(z+2=0)\vee(z^2-2z+4=0)$.

Si ottiene la radice $z_1=-2$ annullando il primo fattore ed altre due radici risolvendo l'equazione di secondo grado seguente

$z^2-2z+4=0 \to z=1\pm\sqrt{1-4}=1\pm i\sqrt{3}$.

L'insieme delle soluzioni dell'equazione è $S=\{-2;1-i\sqrt{3};1+i\sqrt{3}\}$.

b) $2z^4+3z^2-2=0$ Si tratta di un'equazione biquadratica; poniamo $z^2=y$ e procediamo risolvendo l'equazione di secondo grado che si ottiene.

$2y^2+3y-2=0 \to y=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4} \to y_1=-2,\ y_2=\frac{1}{2}$.

Ritornando all'incognita z si ha

$y_1 = -2 \to z^2 = -2 \to z = \pm i\sqrt{2}$; $y_2 = \frac{1}{2} \to z^2 = \frac{1}{2} \to z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Concludiamo che l'insieme delle radici dell'equazione biquadratica in oggetto è $S = \left\{ i\sqrt{2}; -i\sqrt{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$.

c) $z^4 + 3z^2 + 4 = 0 \to z^4 + 4z^2 + 4 - z^2 = 0 \to \left(z^2+2\right)^2 - z^2 = 0 \to \left(z^2+z+2\right)\left(z^2-z+2\right) = 0$

Applicando la legge di annullamento del prodotto si risolvono le due equazioni di secondo grado che si ottengono uguagliando a zero i singoli fattori.

$z^2 + z + 2 = 0 \to z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$;

$z^2 - z + 2 = 0 \to z = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$.

L'insieme delle radici dell'equazione è $S = \left\{ -\frac{1+i\sqrt{7}}{2}; \frac{i\sqrt{7}-1}{2}; \frac{1-i\sqrt{7}}{2}; \frac{1+i\sqrt{7}}{2} \right\}$.

d) $z^4 + 2z^2 + 9 = 0 \to z^4 + 6z^2 + 9 - 4z^2 = 0 \to \left(z^2+3\right)^2 - (2z)^2 = 0 \to \left(z^2+3+2z\right)\left(z^2+3-2z\right) = 0$

Si risolvono ora le due equazioni di secondo grado che si ottengono uguagliando a zero i singoli fattori.

$z^2 + 2z + 3 = 0 \to z = -1 \pm \sqrt{-2} = -1 \pm i\sqrt{2}$; $z^2 - 2z + 3 = 0 \to z = 1 \pm i\sqrt{2}$.

Concludiamo che l'insieme delle radici dell'equazione è $S = \left\{ -1-i\sqrt{2}; -1+i\sqrt{2}; 1-i\sqrt{2}; 1+i\sqrt{2} \right\}$.

e) $16z^4 - 24z^2 + 25 = 0 \to 16z^4 + 40z^2 + 25 - 64z^2 = 0 \to \left(4z^2+5\right)^2 - (8z)^2 = 0 \to$
$\left(4z^2+5+8z\right)\left(4z^2+5-8z\right) = 0$.

Uguagliamo ora a zero i singoli fattori e risolviamo le corrispondenti equazioni di secondo grado.

$4z^2 + 8z + 5 = 0 \to z = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{-4 \pm 2i}{4} = -1 \pm \frac{1}{2}i$;

$4z^2 - 8z + 5 = 0 \to z = 1 \pm \frac{1}{2}i$.

L'insieme delle radici dell'equazione è $S = \left\{ -1-\frac{1}{2}i; -1+\frac{1}{2}i; 1-\frac{1}{2}i; 1+\frac{1}{2}i \right\}$.